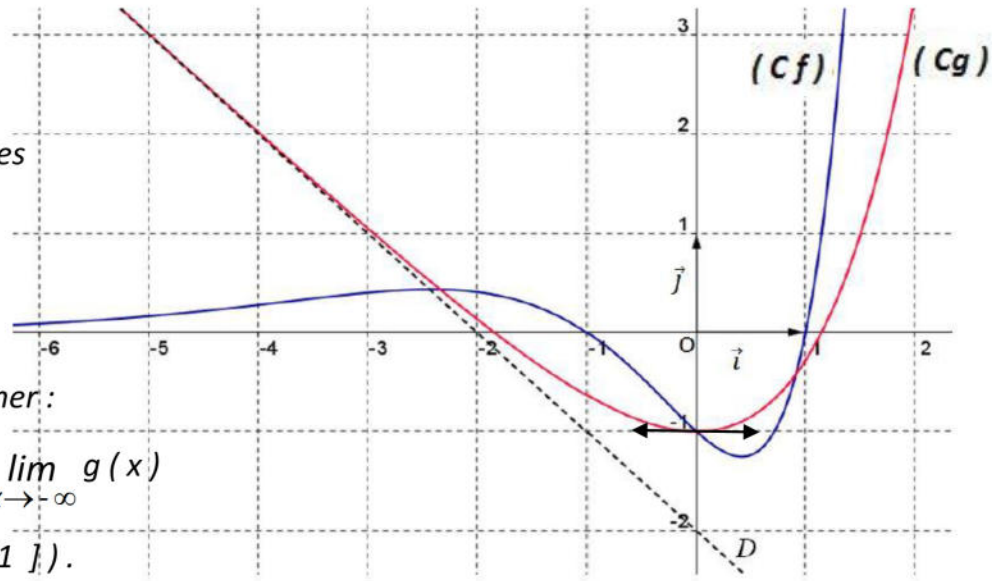


EXERCICE N : 1 (3 points)

On a représenté ci-contre les courbes représentatives **(Cf)** et **(Cg)** de deux fonctions f et g définies et dérivables sur \mathbb{R} .



A) Par lecture graphique , déterminer :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)+x]$ et $g(-\infty ; 1]$.

2) Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation : $f(x) = g(x)$. Justifier

B) Soit la fonction h définie par : $h(x) = g \circ f(x)$.

1) Donner D_h , le domaine de dérivabilité de h . Justifier

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$; $h(-1)$ et $h'(-1)$.

EXERCICE N : 2 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 + x \cos(\pi x) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

On désigne par **(Cf)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que f est continue en 0 .

2) **a)** Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $x^2 + x + 1 \leq f(x) \leq x^2 - x + 1$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

3) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.

B) 1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-4}{(\sqrt{x^2 + 4})^3}$.

b) Déterminer $f([0, +\infty[)$. Justifier

2) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α .

3) **a)** Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) Dédire alors que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$.



EXERCICE N : 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$.

On considère les points M et N d'affixes respectives : $Z_M = i + e^{i\theta}$ et $Z_N = e^{i\theta}$.

1) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M lorsque θ varie dans $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$.

2) Déterminer la valeur de θ pour laquelle O, M et N sont alignés.

3) Vérifier que la forme exponentielle de Z_M est : $Z_M = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}$.

4) Pour toute la suite : $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire Z_M sous forme cartésienne puis montrer que $|Z_M|^2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) Ecrire Z_M sous forme exponentielle puis déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

EXERCICE N : 4 (5 points)

A) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A et B et C d'affixes respectives $Z_A = -2$, $Z_B = -1 + i$ et $Z_C = i$.

Soit $f : P \setminus \{A\} \rightarrow P$; $M_{(Z)} \mapsto M'_{(Z')}$ avec : $Z' = \frac{iZ + i + 1}{Z + 2}$.

1) a) Vérifier que : $Z' = \frac{i(Z + 1 - i)}{Z + 2}$.

b) Déterminer la nature de l'ensemble (Δ) des points M tels que $|Z'| = 1$.

c) Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points M tels que Z' est un réel.

2) a) Vérifier que pour tout $Z \neq -2$ on a : $Z' - i = \frac{1 - i}{Z + 2}$.

b) En déduire que pour tout $M \neq A$, on a : $CM' \cdot AM = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{CM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$.

c) Prouver alors que si M appartient au cercle (\mathcal{C}) de centre A et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle (\mathcal{C}') dont on précisera le centre et le rayon.

3) Soit E le point d'affixe $Z_E = -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Vérifier que : $Z_E - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) En utilisant la questions 2), construire le point $E' = f(E)$.

