

***EXERCICE N1 : ( 8 points)***

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(2,1,0)$ ,  $B(4, -1,2)$  et  $C(-1,1,3)$  et on désigne par  $J$  le milieu du segment  $[AB]$ .

1/ a- Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

b- Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $P = (ABC)$  est :  $x + 2y + z - 4 = 0$ .

2/ Soit  $Q = \{M(x, y, z) \in \mathbb{E} \text{ tels que : } \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = 0\}$ . Montrer que  $Q$  est le plan médiateur du segment  $[AB]$  d'équation cartésienne :  $x - y + z - 4 = 0$ .

3/ Soit  $\Delta$  la droite d'intersection des plans  $P$  et  $Q$  et soit le point  $I(0,3,4)$ .

a- Donner une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .

b- Montrer que la sphère  $S$  de centre  $I$  et tangente à la droite  $\Delta$  a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 8z + 16 = 0. \text{ Préciser le point de contact de } S \text{ et } \Delta.$$

c- Montrer que le plan  $P$  coupe la sphère  $S$  suivant un cercle  $(C)$  dont on précisera le centre et le rayon.

4/ Calculer le volume du tétraèdre  $IABC$ .

***EXERCICE N2 : ( 12 points)***

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 - 2 \ln x$

1/ Étudier le sens de variation de  $g$ . En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

2/ On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a- Déterminer la limite de  $f$  en  $0^+$ . Interpréter graphiquement le résultat.

b- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

c- Montrer que la droite  $(D)$  d'équation :  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$ .

Déterminer la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(D)$ .

3/ Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4/ Montrer qu'il existe un point  $B$ , et un seul, de la courbe  $(\mathcal{C})$  où la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  est parallèle à  $(D)$ .

Préciser les coordonnées de  $B$ .

5/ Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$ . Justifier l'encadrement :  $0,34 < \alpha < 0,35$

6/ Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites  $(D)$  et  $(T)$ .

*Bon travail*