Devoir De Contrôle N°2

Mathématiques

Exercice 1 (3 points)

• *Pour Chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

I) La primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ telle que $F(0)=-1$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $F(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-2$

b) $F(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{e}\right)$

c) $F(x)=\ln\left(x^2+1\right)-2$

II) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$ et D_f son ensemble de définition alors

a) $D_f=\left]0,+\infty\right[$ **b)** $D_f=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ **c)** $D_f=\left]1,+\infty\right[$

III) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit la droite $\Delta:\begin{cases}x=1-4\alpha\\ y=2+\alpha\\ z=3-\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$ et le plan $P: x+2y-2z-1=0$

1) **a)** Δ et sécante à P
b) Δ est strictement parallèle à P.
c) Δ est incluse dans P.

2) La distance du point $A(2,2,2)$ au plan P est :

a) $\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

Exercice 2 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,2,1)$ et $C(1,3,3)$.

1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$x-2y+2z-1=0$

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est $P: 2x+5y+4z-29=0$

a) Montrer que les plans P est (ABC) sont perpendiculaires.

b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P et (ABC)

Montrer que le point C appartient à la droite Δ.

c) Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=3\\ z=3-\alpha\end{cases}\quad ;\ \alpha\in\mathbb{R}$$

d) Calculer la distance du point A à la droite Δ

3) Soit $S=\left\{M(x,y,z)\ ;\ x^2+y^2+z^2-2x-6y-6z+17=0\right\}$

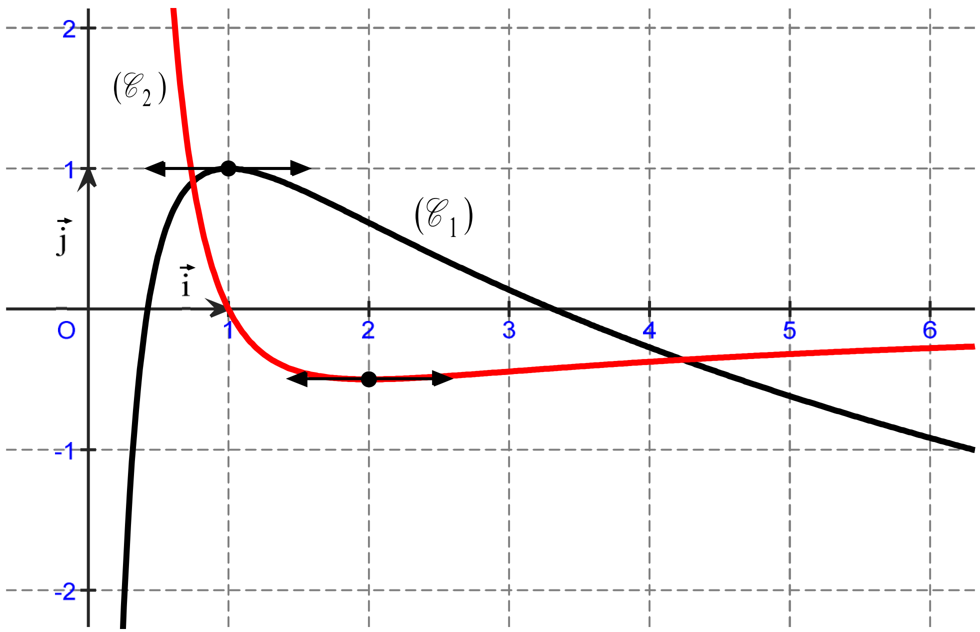
a) Montrer que S est la sphère de centre C et rayon CA .

b) En déduire la position relative de S et P.

Exercice 3 (4 points)

Les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentent une fonction f deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa fonction dérivée f' dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- La droite $y=0$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_2)$ au voisinage de $+\infty$.
- La droite $x=0$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
- $(\mathscr{C}_1)$ possède une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$
- Chacune des courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ possède une seule tangente horizontale.



Par une lecture graphique :

1) Déterminer, parmi les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$, celle qui représente la fonction f'.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

3) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

4) Déterminer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de f.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) On admet que $f(x)=3+\dfrac{a}{x}+b\ln x$; $a,b\in\mathbb{R}$

Calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que, pour tout x de $]0,+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{2}{x}(-1+\ln x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

4) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) Construire $(\mathscr{C})$.