

DEVOIR DE CONTRÔLE n° 2

CLASSE : 4 TECH₂

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DUREE : 2 h

COEFFICIENT : 3

Exercice 1 : (4 points)

1) ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \dots$

- a) a^2 b) $\frac{a^2}{2}$ c) $-a^2$ d) $-\frac{a^2}{2}$

2) Les plans P et Q d'équation respectives : $3x-5y+2z=1$ et $6x-10y+z=3$ sont des plans :

- a) Orthogonaux b) parallèles c) sécants d) strictement parallèles.

3) On considère un cube ABCDEFGH on muni l'espace du repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. Le plan CFH a pour équation :

- a) $x-y+z=2$ b) $x+y+z=2$ c) $x+y-z+2=0$ d) $x+y-z=2$

4) On considère un plan P d'équation $x+2y-z-4=0$ et la droite D

définie par $A(1;-3;0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le plan P et la droite D sont sécants en un point dont l'abscisse est :

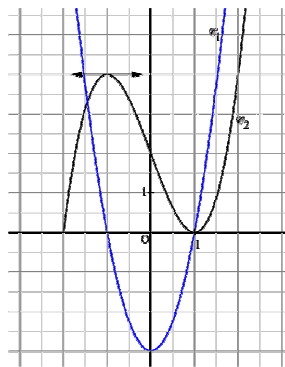
- a) 4 b) 0 c) -2 d) 1

5) ABCDEFGH un cube d'arête 1. $\vec{AB} \wedge \vec{AC} =$

- a) \vec{AE} b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{AE}$ c) $\sqrt{2} \vec{CG}$ d) $\vec{0}$

Exercice 2 : (4 points)

Le graphique ci-dessous représente dans un repère orthonormé les courbes d'une fonction f et une primitive F de f. F et f définies et continues sur $[-2, +\infty[$ et admettant chacune une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(+\infty)$.



- 1) Reconnaître la courbe de f et celle de F. Justifier votre réponse.
- 2) Dresser le tableau de variation de F.
- 3) On donne $f(x) = 3x^2 - 3$. Donner l'expression de F(x).

Exercice 3 : (6 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les droites Δ et Δ' passant

respectivement par $A(1,0,-1)$, $B(1,0,0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) a- Montrer que les droites Δ et Δ' sont orthogonales.

- b- Montrer que les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.
- 2) a- Montrer qu'une équation cartésienne du plan P contenant Δ et perpendiculaire à Δ' est $x - y + z = 0$.
- b- Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de P et Δ' .
- 3) Soit Q le plan passant par le point $C(1,1,1)$ et contenant Δ' . Déterminer une équation cartésienne de Q .

Exercice 4 : (6 points)

Le graphique ci dessous est celui d'une fonction f définie, continue sur $[0,3]$ et dérivable sur $[0,3[$

T_1 : la demi-tangente au point d'abscisse 0

T_2 : la tangente horizontale au point d'abscisse 2

T_3 : la demi-tangente au point de coordonnées $(3, 0)$

En utilisant la courbe représentative de f :

1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

a) $f'_d(0) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = +\infty$

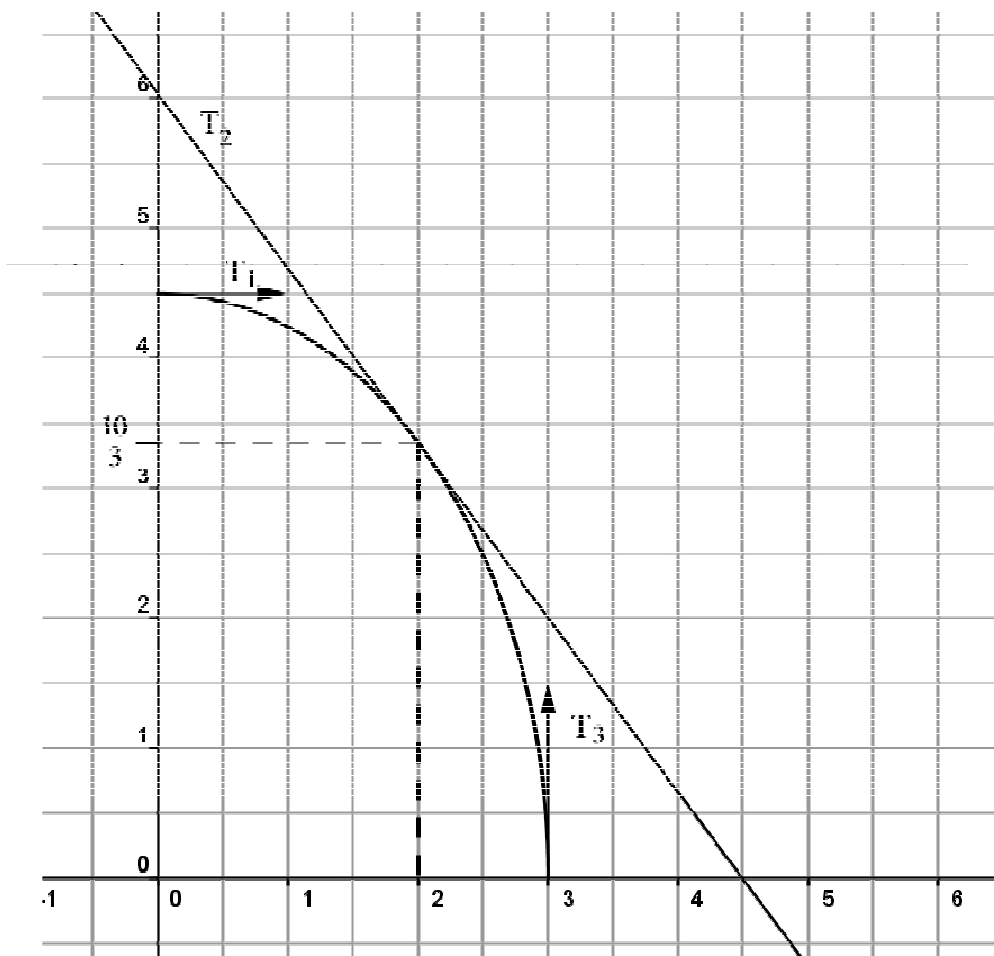
c) $f'(2) = -1$

d) La fonction f réalise une bijection de $[0,3]$ sur $\left[0, \frac{9}{2}\right]$.

2) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .

3) Déterminer $(f^{-1})'\left(\frac{10}{3}\right)$ et $(f^{-1})'_d(0)$

4) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1} .



CORRECTION

CLASSE : 4 TECH 2

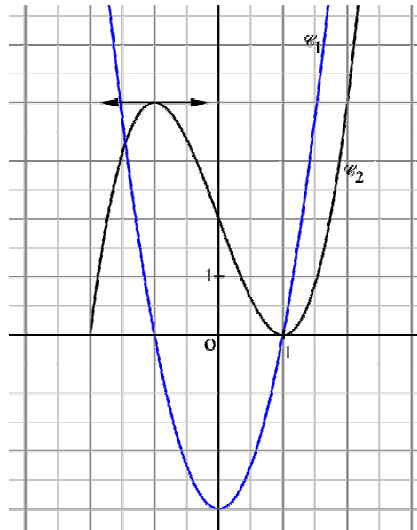
Exercice 1 : (1 x 5 = 5 points)

- 1) ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a. $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ b) $\frac{a^2}{2}$
- 2) Les plans P et Q d'équation respectives : $3x-5y+2z=1$ et $6x-10y+z=3$ sont deux plans : c) sécants
- 3) On considère un cube ABCDEFGH on muni l'espace du repère (A, \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{AE}).
Le plan CFH a pour équation : b) $x+y+z=2$
- 4) On considère un plan P d'équation $x+2y-z-4=0$ et la droite D :
$$\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=-3 \\ z=2\alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}$$

Le plan P et la droite D sont sécants en un point dont l'abscisse est : a) 4

- 5) ABCDEFGH un cube d'arête 1. $\vec{AB} \wedge \vec{AC} =$ a) \vec{AE}

Exercice 2 : (4 points)



1) La courbe \mathcal{C}_2 est celle de F car si non la courbe \mathcal{C}_2 est celui d'une fonction croissante ce qui est impossible.	1,5										
2)	1,5										
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">- 2</td> <td style="padding: 5px;">- 1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$F(x)$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> </table>	x	- 2	- 1	1	$+\infty$	$F(x)$	0	4	0	$+\infty$	
x	- 2	- 1	1	$+\infty$							
$F(x)$	0	4	0	$+\infty$							
3) On donne $f(x) = 3x^2 - 3$ donc $F(x) = 3 \times \frac{1}{3} x^3 - 3x + c = x^3 - 3x + c$ or $F(0) = 2$ donc $c = 2$ ainsi $F(x) = x^3 - 3x + 2$	1										

Exercice 3 : (6 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les droites Δ et Δ' passant

respectivement par $A(1,0,-1)$, $B(1,0,0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

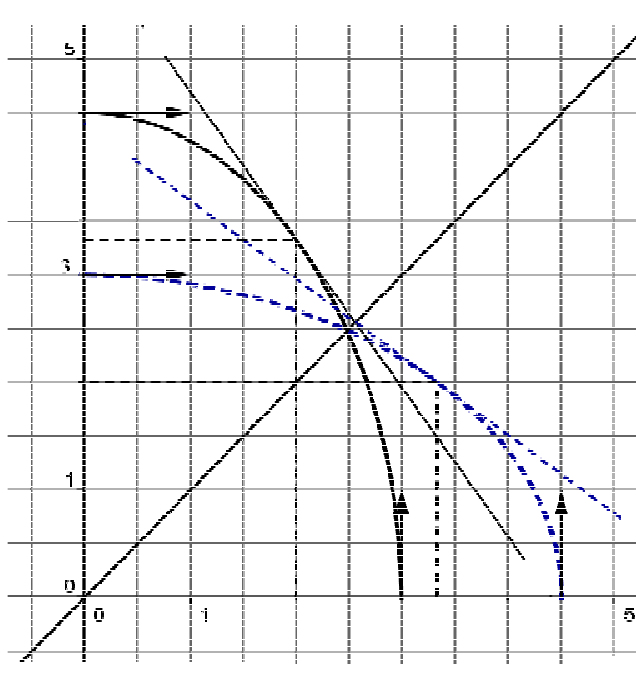
1) a) $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{u}'$ d'où les droites Δ et Δ' sont orthogonales.	0,75
--	-------------

<p>b) $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 1 = -1 - 2 = -3 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ et \vec{u}'</p> <p>ne sont pas coplanaires et par suite les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.</p>	1
<p>2) a) P est perpendiculaire à Δ' donc $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P</p> <p>P: $x - y + z + d = 0$ et $\Delta \subset P$ donc $A(1, 0, -1) \in P$ ainsi $1 - 0 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$</p> <p>P: $x - y + z = 0$</p>	1,25
<p>b) le système d'équations paramétriques de Δ' est $\begin{cases} x = 1 + m \\ y = -m \\ z = m \end{cases} m \in \mathbb{R}$</p> <p>$I(x, y, z) \in P \cap \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + m \\ y = -m \\ z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases} m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + m \\ y = -m \\ z = m \\ 1 + m + m + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{3} \\ x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$</p> <p>D'où $I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$</p>	1,5
<p>3) Q le plan passant par le point $C(1, 1, 1)$ et contenant Δ'</p> <p>$C \notin \Delta'$ Donc $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de Q.</p> <p>$\overrightarrow{CB} \wedge \vec{u}' \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q donc Q: $-2x - y + z + d = 0$ et $C(1, 1, 1) \in Q$ donc</p> <p>$-2 - 1 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$ d'où Q: $-2x - y + z + 2 = 0$</p>	1,5

Exercice 4 : (6 points)

1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

<p>a) $f'_d(0) = -1$ faux en effet la courbe de f admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0 donc $f'_d(0) = 0$</p> <p>b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = +\infty$ faux en effet la courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 3 donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = -\infty$</p> <p>c) $f'(2) = -1$ faux en effet la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse 2 de pente $\frac{6-0}{0-4,5} = \frac{6}{-4,5} = -\frac{4}{3}$</p>	2
--	----------

<p>Donc $f'(2) = -\frac{4}{3}$</p> <p>d) La fonction f réalise une bijection de $[0,3]$ sur $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ vrai la fonction f est strictement décroissante sur $[0,3]$ donc elle réalise une bijection de $[0,3]$ sur $f([0,3])$ et comme f est continue sur $[0,3]$ donc $f([0,3]) = [f(3), f(0)] = \left[0, \frac{9}{2}\right]$</p>	
<p>2) f est dérivable sur $]0,3[$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,3[$ donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0,3[) = \left]0, \frac{9}{2}\right[$</p> <p>Comme la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 3 donc la courbe de la fonction f^{-1} admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $f(3) = 0$ donc f^{-1} est dérivable à droite en 0 ainsi f^{-1} est dérivable sur $\left]0, \frac{9}{2}\right[$</p>	1,5
<p>3) $(f^{-1})' \left(\frac{10}{3} \right) = \frac{1}{f' \left(f^{-1} \left(\frac{10}{3} \right) \right)} = \frac{1}{f'(2)} = -\frac{3}{4}$</p> <p>La courbe de la fonction f^{-1} admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $f(3) = 0$ donc $(f^{-1})'_d(0) = 0$</p>	0,75 x 2
<p>4)</p> 	1