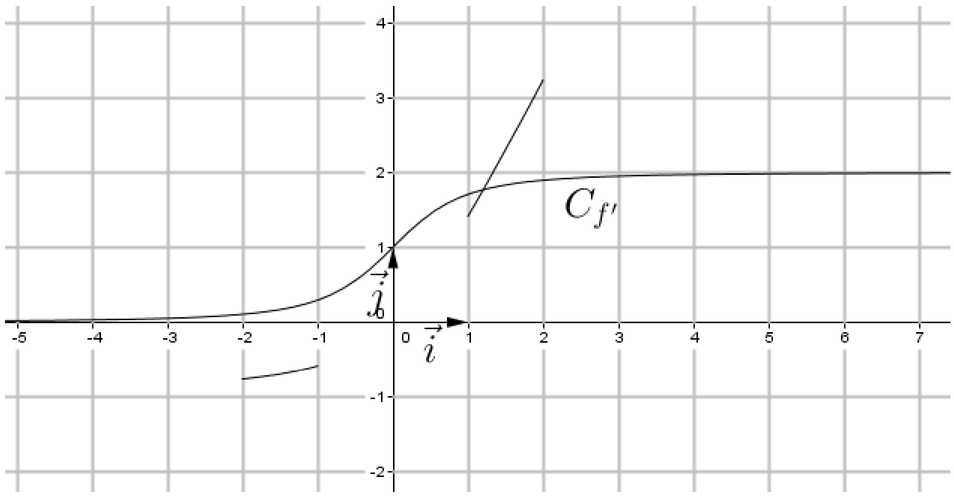
Saidani moêz
12/02/2015

Devoir de contrôle 2

Bac tech

Lycée de Mateur

Exercice N°1(7pts)
On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous :



1. En utilisant le graphique
   (a) Déterminer $f'(0)$
   (b) Existe-il un point de C_f où la tangente est horizontale ?
   (c) Donner le signe de $f'(x)$,en déduire la monotonie de f.
2. Admettant que $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2+1}) = 0$.
   (b) Déterminer l'unique primitive f tel que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, en déduire que $f(0) = 0$ et $f(\sqrt{2}) = 1$.
3. Une partie de C_f est tracée dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   (a) Donner une équation de la tangente T_0 à C_f au point d'abscisse 0.
   (b) Vérifier que la droite D d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$.
   (c) Compléter la courbe de C_f en traçant T_0 et D.

   (a) Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   (b) Représenter la courbe de f^{-1} dans le même repère.

Exercice N°2 (3pts)
Soit la fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

1. Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F de f sur $[0, +\infty[$ s'annulant en 0

2. On pose pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $K(x) = F(\tan x)$

   (a) Montrer que la fonction K est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $K'(x) = 1$

   (b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $K(x) = x$,puis calculer $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $F(1)$

Exercice N°3(5pts)
Les questions dans cet exercice sont indépendantes

1. (a) résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln^2 x - \ln x = 0$

   (b) Déduire le signe de $\left(\ln^2 x - \ln x\right)$ pour tout $x > 0$

2. Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x + 1}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{x}$ .En justifiant

3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f

   (b) Donner l'expression de $f'(x)$

Exercice N°4(5pts)
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère les points $A(-2, 0, 1)$; $B(1, 2, -1)$ et $C(-2, 2, -2)$.

1. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

   (b) Montrer que le point $C \notin (AB)$

   (c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

   (a) Vérifier q'une équation du plan (ABC) est $2x - y + 2z = 0$

   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle (ABC) passant par O.

2. Soit P et P' les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.Montrer que les plans P et P' sont sécants suivant une droite D d'équations paramétriques $\begin{cases} x &= -2 \\ y &= -1 + 3\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ z &= \alpha \end{cases}$

3. Déterminer le point d'intersection de D avec le plan (ABC).

Bon travail