

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<u>Devoir de contrôle n° 2</u> Mathématiques	Niveau : 4 ^{ème} Tech 2
Date : 24 / 02 / 2016	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures



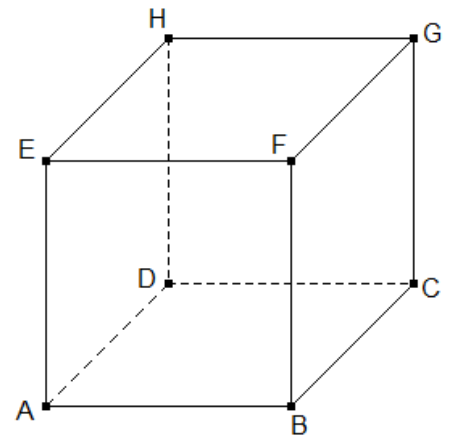
Exercice n°1 : (4,5 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte.
On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

- Le nombre $A = 2 \ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5 \ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right)$ est égal à :
a/ $1 + 2 \ln 5$ b/ $8 \ln 2$ c/ $1 + 4 \ln 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x)$ est égale à :
a/ 0 b/ $-\infty$ c/ $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$ est égale à :
a/ 1 b/ 2 c/ $\ln 2$

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.



- Le produit scalaire $\overline{AC} \cdot \overline{BH}$ est égal à :
a/ 0 b/ $\sqrt{2}$ c/ $\sqrt{3}$.
- Le vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ est égal à :
a/ \overline{AD} b/ \overline{BF} c/ \overline{BH} .
- Une équation cartésienne du plan (ACE) est :
a/ $x - y = 1$ b/ $x + y = 0$ c/ $x - y = 0$.

Exercice n°2 : (7,5 pts)

A. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

- Dresser le tableau de variations de g .
- a/ Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α .
b/ Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.
- Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

B. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par: $f(x) = \ln x + x - x \ln x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2) a/ Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b/ Etablir le tableau de variation de f .

3) a/ Vérifier que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) - 1 = (\ln x - 1)(1 - x)$.

b/ Etudier la position de C_f par rapport à la droite $\Delta : y = 1$.

c/ Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha}$.

d/ Tracer Δ et C_f . (donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près en prenant $\alpha \cong 1,7$).

Exercice n°3 : (7 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0 ; 1 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; -2)$, $C(0 ; 0 ; -1)$ et $D(1 ; -1 ; 0)$.

1) a/ Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A , B et C déterminent un plan P .

b/ Calculer l'aire du triangle ABC .

c/ Montrer que le point D n'appartient pas au plan P .

d/ Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$, en déduire la distance d de D à P .

2) a/ Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - y + z + 1 = 0$.

b/ Montrer que le point C est le projeté orthogonal de D sur P .

3) On considère l'ensemble S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

a/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R .

b/ Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle \mathcal{C} que l'on caractérisera.

Bonne chance