Exercice n 1 ….6pts

Soit la suite réelle (u_n) *définie sur IN par :* $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 2u_n \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n ∈IN on a : $(-1) < u_n < 0$.

2) **a)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur IN .

b) Déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite .

3) On considère la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \ln(1 + u_n)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b) Exprimer v_n en fonction de **n** puis déduire que $u_n = e^{(-\ln 2).2^n} - 1$.

c) Retrouver alors la limite de u_n .

Exercice n 2…7pts

A. Soit la fonction f définie sur IR : $f(x) = xe^{-x}$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Montrer que $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$
3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe Cf de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

tel que OI=1cm et OJ=2cm.

6. Soit **A** l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe Cf et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que $A = \frac{2e-4}{e}$ cm^2

B. soit $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots \ldots + \frac{n}{e^n}$

1. Montrer que u_n est croissante
2. Vérifier que $u_n = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$
   a. Soit $k \geq 2$ Montrer que pour tout $x \in [k-1\,,\ k]$

   on a $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$

   b. En déduire que $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$.

Exercice n 3….7pts

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Soit un entier naturel $n \geq 1$

1. *Calculer* $\int_0^n e^{-t} dt$
2. *En utilisant une intégration par parties*

Calculer en fonction de **n** *l'intégrale* $u_n = \int_0^n te^{-t} dt$

3. *Soit* $v_n = \int_0^n t^2 e^{-t} dt$

   Montrer que $v_n = 2u_n - n^2 e^{-n}$, $n \geq 1$

Partie B :

Soit (I_n)*la suite définie par* $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sint\, dt$

$$\text{et} \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n sint\, dt \qquad , \qquad n \in IN^*$$

1. *Calculer* I_0
2. *Calculer* I_1 *par intégration par parties*
3. *En utilisant une intégration par parties,* montrer que pour tout $n \in IN^*$ *on a*

$$I_n = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} cost\, dt$$

4. *En utilisant une intégration par parties,* montrer que pour tout $n \geq 2$ *on a*

$$I_n = n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2}$$

5. En déduire I_2 **et** I_3. Puis la *valeur de 'intégrale*

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2t + t^2 - t^3) sin\, t\, dt$$