LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
« 4$^{\text{éme}}$ Sciences techniques 3 »

2017/2018
DEVOIR DE CONTRÔLE 2
MATHEMATIQUES
2 heures

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1: (3 points)

I/ ***Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez la sans justifier.***

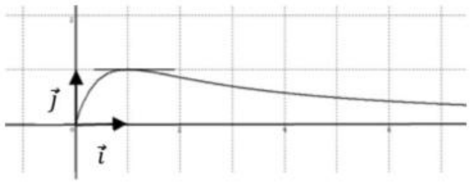
1) Une racine carrée du nombre complexe $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5$ est :

a) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ **b)** $e^{i\frac{5\pi}{8}}$ **c)** $e^{i\frac{\pi}{8}}$

2) Soit a un réel non nul. On considère l'équation (E) : $ia.z^2 + z + a = 0$. On note z' et z'' les solutions de l'équation (E), alors:

a) $z' \times z'' = -i$ **b)** $z' \times z'' = \frac{-1}{ia}$ **c)** $z' \times z'' = \frac{1}{ia}$

II/ Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et voici ci-contre la courbe de sa fonction dérivée f'.
Soit (C) la courbe représentative de la fonction f.
Pour chacune des propositions suivantes, répondre par : <u>vrai</u> ou <u>faux</u> sans justifier :

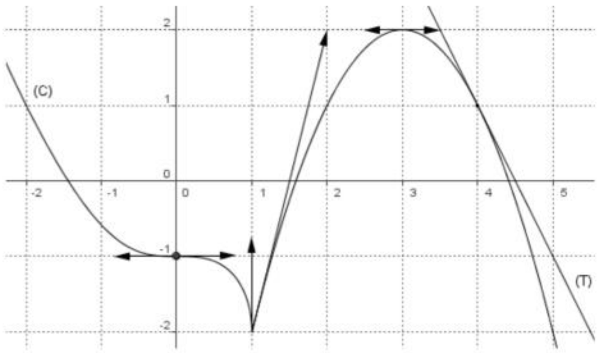


1) La fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$

2) Le point d'abscisse 1 de (C) est un point d'inflexion de (C).

EXERCICE 2: (5 points)

Dans le graphique ci-contre on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR.



⁎ (T) est la tangente à (C) au point A(4,1).
⁎ Chaque flèche représente un vecteur directeur d'une demi-tangente.
⁎ La courbe (C) admet exactement deux tangentes horizontales.
⁎ La courbe (C) admet deux branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$

1) Déterminer : $f'(0)$, $f'_d(1)$, $f'(3)$, $f'(4)$, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)+2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

2) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f et préciser les extrema.

4) Soit la fonction g définie sur $]-2,1[$ par : $g(x) = fof(x)$

a) Déterminer $f(]-2,1[)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]-2,1[$ puis écrire $g'(x)$ à l'aide de $f'(x)$ et $f(x)$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction g sur $]-2,1[$.

EXERCICE 3: (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1{,}1]$ par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1) et à gauche en 1.

b) Interpréter les résultats obtenus.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1{,}1[$ et que $f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $-1 < x < 1$

b) Dresser le tableau de variation de f. En déduire un encadrement de $f(x)$.

3) On pose $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in [-1{,}1]$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0{,}1[$.

b) En déduire que α est une solution dans IR de l'équation : $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$

EXERCICE 4: (6 points)

I/ 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+3i)z + 2i - 2 = 0$

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B et D d'affixes respectives : $1+i$, $2+2i$ et $2i$

a) Déterminer l'affixe du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.

b) Vérifier que $\mathrm{z_B} - \mathrm{z_A} = -\mathrm{i}(\mathrm{z_D} - \mathrm{z_A})$

c) En déduire que le parallélogramme ABCD est un carré.

II/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2 - (1 + 2i + i\cos\theta)z + 2i - 2\cos\theta = 0$; $\theta \in [0, \pi]$

1) a) Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E_θ)

b) En déduire que l'autre solution de (E_θ) est $z_1 = 1 + i\cos\theta$

2) Dans le plan complexe défini précédemment on donne les points K et M d'affixes respectifs $z_{\mathrm{K}} = \frac{i}{2}$ et $z_{\mathrm{M}} = 1 + i\cos\theta$.

Déterminer la valeur de θ pour laquelle la distance KM est minimale.