Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 2	4 Techniques 2
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	15 - 02 - 2019

EXERCICE N : 1 (5.75 points)

On considère dans l'espace (ξ) muni du repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

les points $A(2, 2, 1)$, $B(0, -2, 4)$ et $C(2, 0, -4)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$.

b) Déduire que les points O , B et C définissent un plan noté P .

c) Prouver que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O .

c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égal à $\sqrt{2}$ **.**

2) (S) = $\{ M(x, y, z) \in \xi$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0 \}$.

Montrer que **(S)** est la sphère de centre A et de rayon $R = \sqrt{11}$.

3) a) Calculer la distance OA .

b) Déduire que le plan P coupe la sphère **(S)** suivant un cercle **($\mathscr{C}$)** de centre O et de rayon $r = \sqrt{2}$.

c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle **($\mathscr{C}$)** .

4) On considère le point $H(1, -1, 0)$.

a) Prouver que le point H est le point de contact de la sphère **(S)** et la droite (BC) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à **(S)** en H .

EXERCICE N : 2 (5.75 points)

A) Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x - 2\ln(x)$.

1) Etudier les variations de g .

2) Calculer g (1) puis déduire le signe de g (x) sur $]0 ; +\infty[$.

B) Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$.

On note **(C f)** sa courbe dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variations de f .

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une unique solution $\alpha \in]0,56 ; 0.57[$

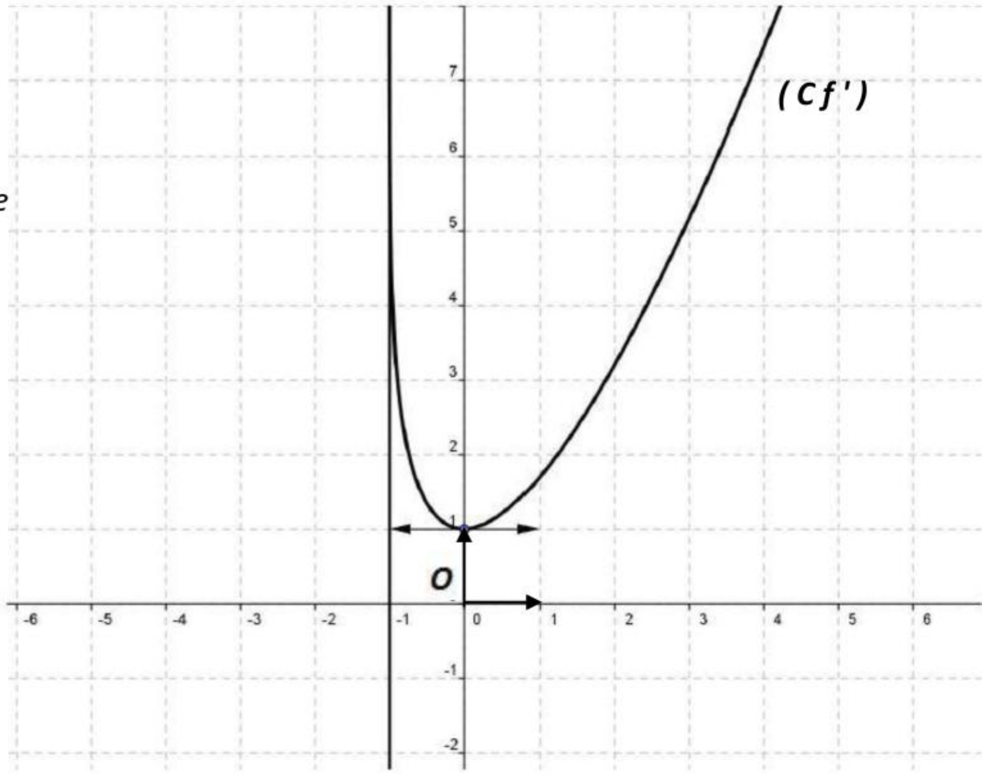
C) Dans l'annexe on a construit la courbe **(Γ)** de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) Etudier les positions relatives des courbes **(C f)** et **(Γ)** .

2) Tracer dans l'annexe la courbe **(C f)** .

EXERCICE N : 3 (8.5 points)

A) Lecture graphique : b



Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ tel que $\boldsymbol{f(0)=0}$.
*la courbe **(C f ')**, ci-contre, est la représentation graphique de sa fonction dérivée f'.*
*La droite d'équation : $x=-1$ est une asymptotes à **(C f ')**.*

***1)** Lire graphiquement*
$f'(0)\ ;\ f''(0)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x}$

***2)** Dresser le tableau de variations de f'.*

***3) a)** Justifier que O est le seul point d'inflexion de la courbe **(C f)** représentative de f.*

***b)** Donner une équation cartésienne de la tangente **(T)** à **(C f)** au point O.*

***4)** Soit g la restriction de f' sur $[0\ ;+\infty[$.*

***a)** Montrer que g admet une réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.*

***b)** Déterminer $g^{-1}(1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g^{-1}(x)}{x-1}$.*

***5)** On suppose que : $f'(x)=\boldsymbol{a}+x\ln(\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b})$ où **a** et **b** sont des constantes réelles.*
*Utiliser la question **1)** pour déterminer les valeurs de **a** et **b**.*

***B)** On suppose pour la suite que pour tout $x\in\ ]-1\ ;\ +\infty[\ :\ f'(x)=1+x\ln(x+1)$.*

***1)** Montrer que pour tout $x\in\ ]-1\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\dfrac{1}{4}(x^2-6x)$.*

***2)** Prouver que $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\dfrac{7}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.*

***3) a)** Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.*

***b)** Tracer dans un repère orthonormé (**Unité 2 cm**) la tangente **(T)** et la courbe **(C f)**.*

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie