Devoir De Contrôle N°3

Mathématiques

Exercice 1 (3 points)

- *Répondre par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.*

1) La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ n'admet pas de limite.

2) Toute suite décroissante et bornée est convergente.

3) La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \ln(2^n)$ est croissante.

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 2n \cdot e^{\frac{1}{n}}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$

Exercice 2 (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de *f*.

3) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

4) Tracer T et $(\mathscr{C})$.

Exercice 3 (7 points)

1) Soit f la fonction définie sur $I = [3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x + 2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I) \subset I$.

b) Résoudre dans I l'équation $f(x) = x$.

c) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{5}$.

d) Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $|f(x) - 3| \le \dfrac{1}{5}|x - 3|$.

2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 2} \end{cases}$

a) Montrer que, pour tout entier naturel *n* on a : $|U_{n+1} - 3| \le \dfrac{1}{5}|U_n - 3|$.

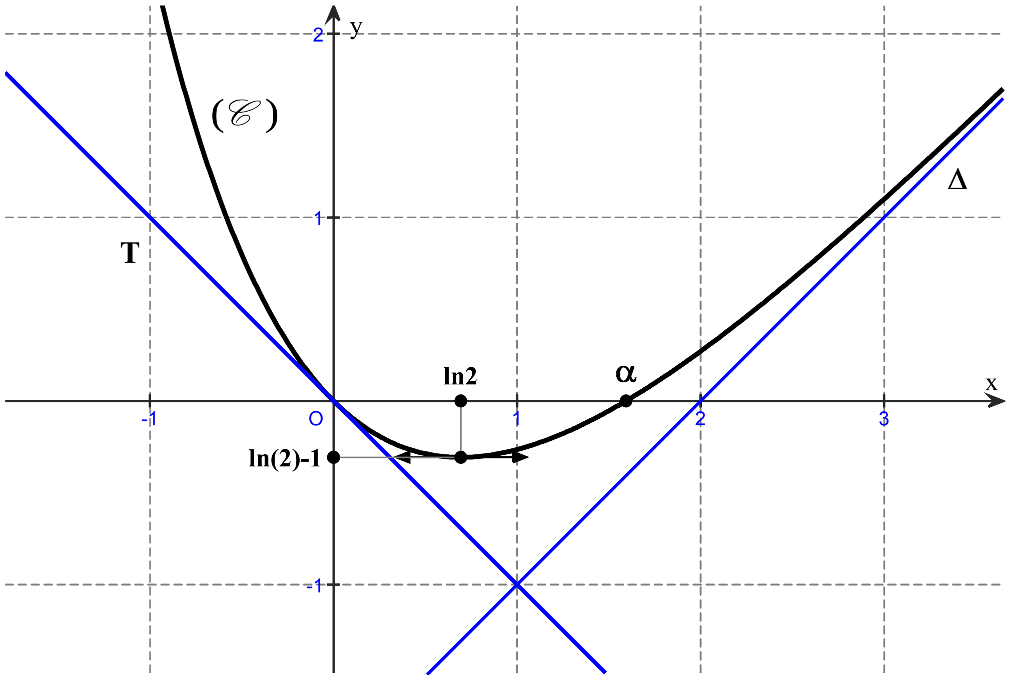
b) En déduire pour tout entier naturel *n* on a : $|U_n - 3| \le \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

c) Déterminer alors la limite de (U_n).

Exercice 4 (4,5 points)

Dans le graphique ci-dessous :

- $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La droite $\Delta : y = x - 2$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
- La droite T est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
- $(\mathscr{C})$ possède une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$
- La courbe $(\mathscr{C})$ possède une seule tangente horizontale.
- $f(\alpha) = 0$



Par une lecture graphique :

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right)$

3) Déterminer $f'(0)$ et $f'(\ln 2)$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq 0$

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$

a) Justifier que g réalise une bijection de $[\ln 2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.