Devoir De Synthèse N°1

Mathématiques

Exercice N°1 (5 pts)

- Chaque question comporte trois propositions notées **(a)**,**(b)** et **(c).** Une réponse par question est exacte.
- Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soient A, B et C trois points distincts. si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 5i$ alors :

(a) A,B et C sont alignés. **(b)** le triangle ABC est rectangle en A. **(c)** le triangle ABC est isocèle en A

2) Soient les points A et B d'affixes respectives $1+i$ et $1-i$.

L'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|z-1-i| = 3$ est :

(a) Le cercle de centre A et de rayon 3 **(b)** Le cercle de centre B et de rayon 3 **(c)** La médiatrice de [AB].

3) Soient les points A et B d'affixes respectives $1+i$ et $1-i$.

L'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|z-1-i| = |z-1+i|$ est :

(a) Le cercle de diamètre [AB] **(b)** La médiatrice de [AB] **(c)** La droite (AB)

4) Soit le nombre complexe $z = -5e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors :

(a) $\arg(z) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$ **(b)** $\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$ **(c)** $\arg(z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$

5) Soit z un nombre complexe vérifiant : $|z| + 2z = 11 + 8i$ alors la forme algébrique de z est :

(a) $z = 3-4i$ **(b)** $z = 4+3i$ **(c)** $z = 3+4i$

Exercice N° 2 (5 pts)

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} - i$

Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

2) Soit $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

a) Montrer que $|Z| = 1$

b) Montrer que $\arg(Z) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

c) En déduire la forme trigonométrique de Z.

Exercice N° 3 (4 pts)

Soit la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{2x-4}+1$

1) Montrer que f est continue sur $[2,+\infty[$

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour $x\in]2,+\infty[$.

b) En déduire que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

4) Expliciter $f^{-1}(x)$.

Exercice N° 4 (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x+6}{(x-1)^2}$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que f peut s'écrire sous la forme : $f(x)=x+2+\dfrac{4}{(x-1)^2}$.

2) On admet que le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖	↘	6	↗	

a) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite $D: x=1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

c) Montrer que la droite $\Delta: y=x+2$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

d) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

b) Vérifier que $\alpha\in]-3,-2[$.

4) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$.