Devoir De Synthèse N°1

Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

• Pour Chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

• La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	4	↘	$-\infty$

1. Le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=1$ est :

a. aucune **b.** une **c.** deux

2. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

a. f' est négative sur $[-5,-2]$ **b.** f est monotone sur $[4,6]$

c. f' est négative sur $[1,2]$

3. Parmi les équations de droites suivantes, laquelle est celle d'une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$?

a. $y=1$ **b.** $x=1$ **c.** $y=-1$

4. Parmi les fonctions suivantes, laquelle est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

a. $\dfrac{1}{f(x)}$ **b.** $\sqrt{f(x)}$ **c.** $\dfrac{f(x)}{x^2+3}$

Exercice 2 (6 points)

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+2\sqrt{3}z+7=0$

. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z)=z^4+2\sqrt{3}z^3+8z^2+2\sqrt{3}z+7$$

a. Calculer $f(i)$ et $f(-i)$.

b. Montrer que $f(z)=(z^2+1)P(z)$ où P est un polynôme de second degré que l'on déterminera.

c. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

3. Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives

$z_A=i$; $z_B=-i$; $z_C=-\sqrt{3}+2i$ et $z_D=-\sqrt{3}-2i$

a. Ecrire $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ et $\dfrac{z_C-z_B}{z_D-z_B}$ sous la forme algébrique.

b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

Exercice 3 (6 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1. a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

c. Vérifier que $\alpha \in \left]1,6\ ;\ 1,7\right[$.

d. En déduire le signe de $g(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b. Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

3. a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b. Dresser alors le tableau de variation de f.

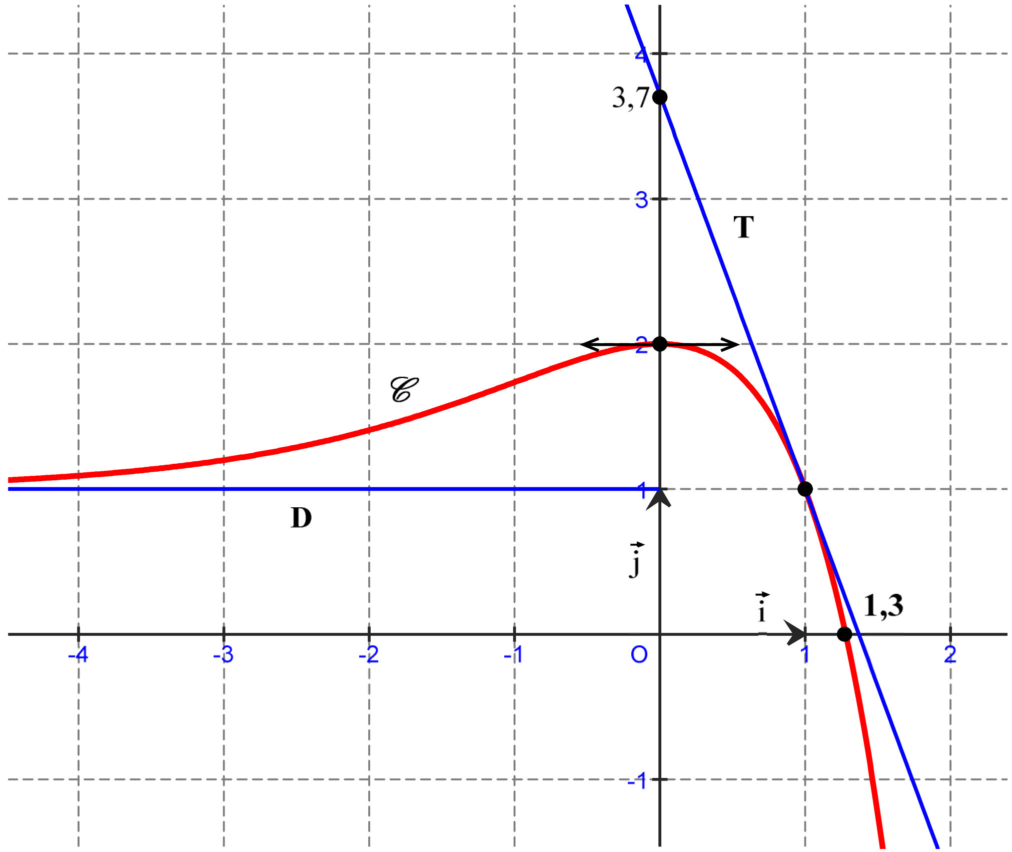
4. Ecrire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 4 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
- La droite $D : y = 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
- $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
- $\mathscr{C}$ admet une seule tangente horizontale.



En utilisant le graphique, Déterminer :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2. $f'(0)$ et $f'(1)$.

3. Le tableau de variation de f.

4. Le signe de $f(x)$.