Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2009 - 2010
Épreuve : Mathématiques	Devoir de Synthèse n° 1	Durée : 2h
Prof : MAATALLAH	Le 10 - 12 - 2009	Classe : 4 Tec1,2

EXERCICE N 1 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$

1/ a. Résoudre dans C l'équation $(E_1): z^2 - 2z + 2 = 0$. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

b. En déduire les solutions de l'équation $(E_2): z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

2/Résoudre dans C l'équation $(E_\theta): z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0$. Ecrire les solutions sous forme exponentielle .

3/ On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + ie^{i\theta}$, $z_B = 1 - ie^{i\theta}$ et $z_C = 2$

a. Déterminer l'ensemble E_A décrit par le point A lorsque $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$. Calculer l'affixe du milieu I du segment $[AB]$.

b. Déduire l'ensemble E_B décrit par le point B lorsque θ varie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

c. Montrer que $OACB$ est un parallèlogramme.

d. Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ puis déterminer θ pour que $OACB$ soit un carré.

EXERCICE N 2 : (6 points)

1/ Soit f la fonction définie sur $[0,2[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ si $x \in]0,2[$.

a. Montrer que f est continue en 0 puis étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur $]0,2[$ et que $f'(x) = \frac{x}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$.

c. Montrer que f réalise une bijection de $[0,2[$ sur $\mathbb{R}_+$.

2/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$, puis construire C_f de f et $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.

EXERCICE N 3 :(8 points)

A l'aide du graphique : (voir page 2)

1/ Déterminer en fonction de $f(x)$: $f(-12-x)$, $\forall x \in [-7,-5]$ et $f(-5-x)$, $\forall x \in [-\frac{7}{2},-\frac{3}{2}]$.

2/ a. Donner , en justifiant , le domaine de continuité puis le domaine de dérivabilité de f .

b. Etudier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to(-4)^-}\left[\frac{f(x)-2}{x+4}\right]$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{-5}{2})^-}\left[\frac{2f(x)+6}{2x+5}\right]$.

c. Montrer qu'il existe un réel $c \in]-5,-4[$ tel que $f'(c) = 6$.

3/ a. Montrer que les restrictions $f_1 = f_{/]-\infty,-7]}$ et $f_2 = f_{/[2,+\infty[}$ sont bijectives. Dresser les tableaux de variation de f_1^{-1} et f_2^{-1}.

b. Etudier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{f_1^{-1}(x)}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\frac{f_1^{-1}(x)+7}{x-2}\right]$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\frac{f_2^{-1}(x)-2}{x-2}\right]$.

4/ a. Montrer que $h = f_{/[-1,2]}$ est bijective . Déterminer le domaine de dérivabilité de h^{-1} .

b. Construire (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ dans un même repère orthonormé .

5/ Montrer que f est une primitive d'une fonction g sur $[-\frac{7}{2},-1]$ et donner le signe de $g(x)$.

6/a. Montrer que f admet des primitives sur $[-7,-5]$. Soit F la primitive de f sur $[-7,-5]$ égale (-3) en (-6) .

b. Déterminer $F'(-7)$, $F'(-6)$, $F'(-5)$ et $F''(-6)$.

c. Donner les variations de $G : x \mapsto F(x) - \frac{x^2}{4} - 2x$ sur $[-7,-5]$ puis déduire le signe de $G(x)$.

Bon Travail

Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		*2009 - 2010*
Épreuve : Mathématiques	***Devoir de Synthèse n° 1***	
Prof : MAATALLAH	*Le 10 - 12 - 2009*	*Durée : 2 h*