L-A-T-K-G **Pr: ABDALLAH.A**	**DEVOIR DE SYNTHESE N°1**	**Le : 08-12-2010** **4 ^{éme} tech :1** **Durée : 2 heures**

<u>EXERCICE N°1</u> (3 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. L’exercice consiste à cocher la réponse exacte.

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=x(x-1)(x-2)$ et ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

ζ admet exactement

a) Aucune tangente horizontale b) 1 tangente horizontale c) 2 tangentes horizontales

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout réel x et $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ est égale à

a) 0 b) 1 c) n’existe pas

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout réel non nul x, $f'(x)$ est égale à :

a) $2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. b) $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. c) $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

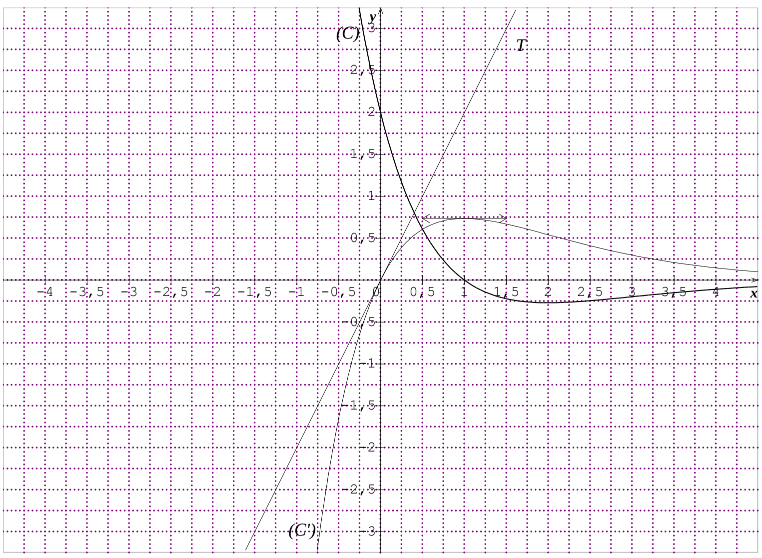
<u>EXERCICE N°2</u> (5 points)

Dans le graphique ci dessous : (C) et (C’) sont deux courbe représentatives, dans un repère orthonormé d’une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f 'qui est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, chacune des deux courbes(C) et (C’) possède :

-Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

- Une asymptote $\Delta : y = 0$ au voisinage de $+\infty$
- La droite T est la tangente à (C’) au point d’abscisse 0.

1) Par une lecture graphique :
   a) Justifier que la courbe (C’) est celle qui représente la fonction f.
   b) Déterminer f(0) , f '(0) et f '(1).
2) a) Déterminer une équation cartésienne de T.
   b) Donner une valeur approchée de f(-0.01) à 10^{-2} prés.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Soient A(0,2) et B(1,0). Montrer que (C) admet une tangente parallèle à la droite (AB).



EXERCICE N°3(6 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\begin{cases} f(x)=x^2-x & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right[\\ f(x)=\sqrt{tg(x)} & \text{si } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 0.

 b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

 c) Dresser le tableau de variation de f sur $\left]-\infty,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Montrer que sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ C_f admet au moins une tangente parallèle à la droite D : $y=\frac{4}{\pi}x$.

EXERCICE N°4(6 points)

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation (E) : $Z^2-(3+i)Z+4=0$.

 a) Calculer $(1+3i)^2$.

 b) Résoudre alors l'équation (E).

2) Soient $f(Z)=Z^3-(4+i)Z^2+(7+i)Z-4=0$ et l'équation (E') : f(Z) = 0.

 a) Montrer que l'équation (E') admet une racine réelle Z_0 que l'on déterminera.

 b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $f(Z)=(Z-1)(aZ^2+bZ+c)$.

 c) Résoudre alors (E').

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\vec{u},\vec{v})$.

 On considère les points A et B d'affixes respectives 2+2i et 1-i.

 a) Ecrire Z_A ,Z_B et $\frac{Z_A}{Z_B}$ sous formes exponentielles.

 b) En déduire que le triangle OAB est rectangle en O.

EXERCICE N°4

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

(E_θ) : $Z^3 - 3iZ^2 - (3+ e^{i\theta})Z + i\left(1+ e^{2i\theta}\right) = 0$. Avec θ un réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

1- Vérifier que i est solution de (E_θ).

2- Résoudre alors l'équation (E_θ)

3-Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\vec{u},\vec{v})$

On considère les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives i , $Z_1 = i+e^{i\theta}$ et $Z_2 = i - e^{2i\theta}$.

a- Montrer que I est le milieu du segment [$M_1 M_2$]

b –Déterminer l'ensemble (E_1) des points M_1 lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

c- En déduire l'ensemble (E_2) des points M_2.

4- a- Montrer que si $OM_1 = OM_2$ alors $\theta = 0$

b- Pour $\theta = 0$, écrire Z_1, Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme exponentielle. En déduire la nature du triangle $0M_1M_2$.