

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

Durée 2h

Mr : Orfi Raouf

4^{ème} T₁₊₂**Exercice N°1** (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

1) Une racine carrée de $Z = \sqrt{3} - i$ est :	a. $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$	b. $-1 + i\sqrt{3}$	c. $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
2) Si z' et z'' sont les solutions de l'équation : $iz^2 + 5z + 3 - i\sqrt{7} = 0$ alors $z' + z'' =$	a. $5i$	b. $-5i$	c. 5
3) n entier naturel non nul, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^n - 1}{x} =$	a. 0	b. $n+1$	c. n

Exercice N°2 (5 points)

1) a- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 - (1 + 3i)z + 2i - 2 = 0$.

b- Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $[0, \pi]$ et l'équation :

$$E_\theta: z^2 - (1 + 2i + i \cos \theta)z + 2i - 2 \cos \theta = 0 ; (z \in \mathbb{C})$$

a- Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de E_θ .

b- Trouver alors l'autre solution z_1 de E_θ en fonction de θ .

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et M d'affixes respectives $z_A = \frac{i}{2}$ et $z_M = 1 + i \cos \theta$.

a- Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $[0, \pi]$.

b- Déterminer le réel θ pour laquelle la distance AM est minimale

Exercice N°3 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 1}$ On désigne par (C)

la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2) Calculer $f'(x)$ puis Dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que $D : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

4)a. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la fonction réciproque de f

b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x élément de J .

5) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$

et vérifier que $2 < \alpha < 3$

6) Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

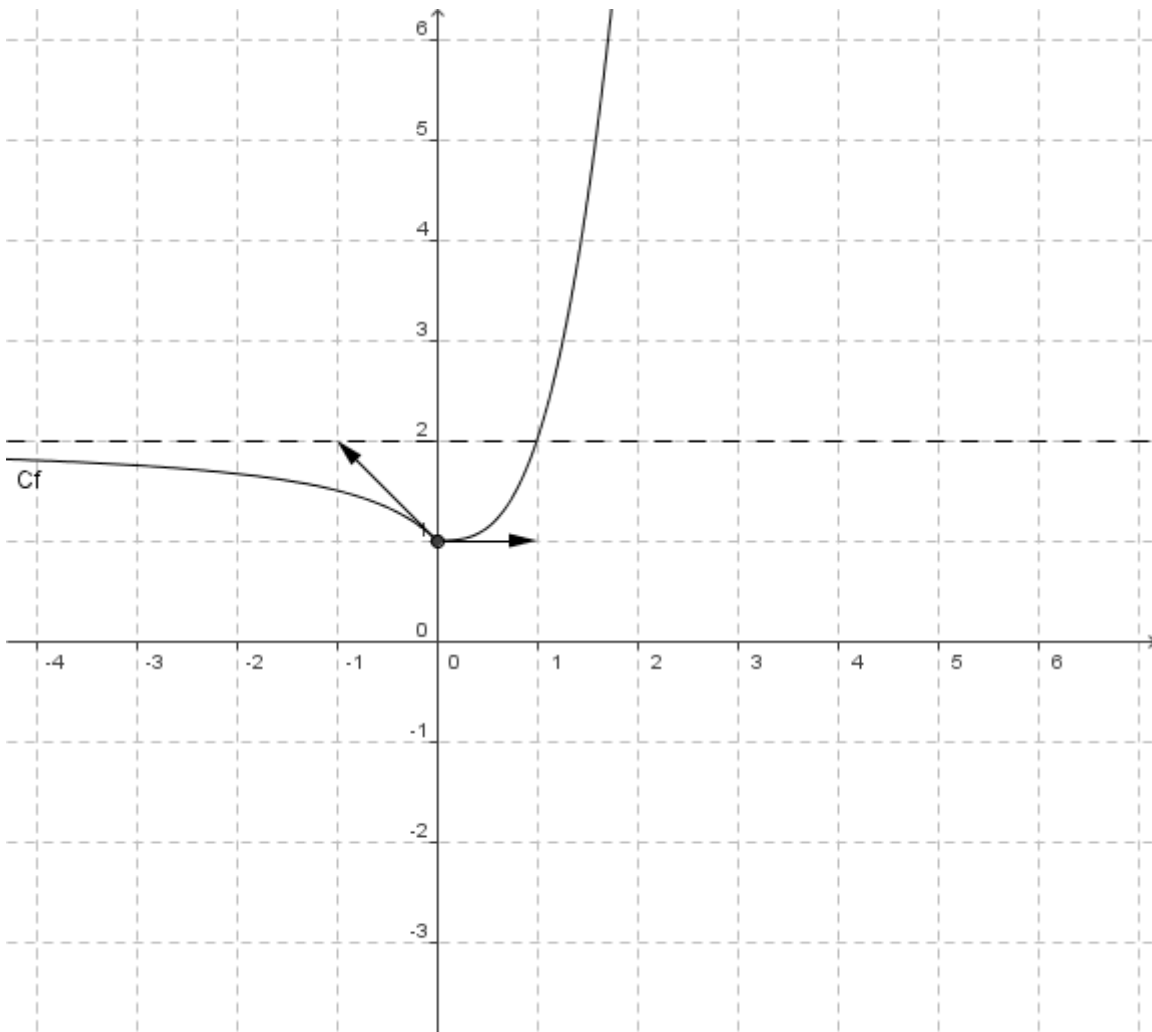
a. Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $(g)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

b. En déduire que $g(x) = -1 + \tan x$; pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

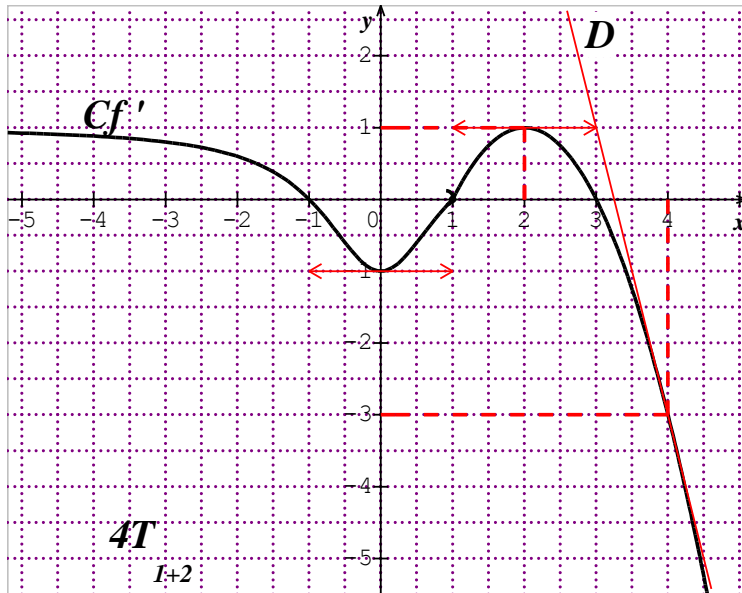
Exercice N°4 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . La courbe (C_f) ci-dessous représente une fonction f définie sur \mathbb{R} et la droite T est la tangente à la courbe (C_f) au point A (1,2)

- 1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$
- 2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 1
- 3) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R}
- 4) Soit g la restriction de f sur $[0, +\infty[$
 - a. Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur sur un intervalle J que l'on précisera
 - b. Construire la courbe (ζ') de g^{-1} puis dresser le tableau de variations de g^{-1}
 - c. Calculer $(g^{-1})'(2)$
 - d. g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? Justifier votre réponse



Exercice n°5(supplémentaire)



Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}

C_f' est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f dans un repère orthonormé

1) VRAI OU FAUX :

- a. f admet un minimum en 1
- b. f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$

2) a. Donner le signe de f' sur \mathbb{R}

b. En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R}

3) a. Soit h la restriction de f sur $[1, 3]$

Montrer que h est une bijection sur $[1, 3]$

b. sur quel intervalle h^{-1} est dérivable ?

4) a. préciser $f''(2)$.

le point d'abscisse 2 est elle point d'inflexion de la courbe C_f ?

b. Déterminer $f''(4)$



Exercice N°2 — DEVOIR

(6 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $I =]0,3]$ par $f(x) = \frac{x - \sqrt{9 - x^2}}{x}$. On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3 Interpréter graphiquement le résultat obtenu

b. Montrer que f est dérivable sur $]0,3]$ et que $f'(x) = \frac{9}{x^2 \sqrt{9 - x^2}}$

c. Dresser alors le tableau de variations de f sur $I =]0,3]$

2) a. Montrer que f est une bijection de $I =]0,3]$ sur un intervalle J que l'on précisera

b. Montrer que l'équation (E) : $f(x) = -x$ admet une solution unique α dans $]0,3]$ et que $\alpha \in]1,2 ; 1,3[$

3) a. Déterminer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$

b. vérifier que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$

B/ Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(3 \cos x)$

1) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $(g)'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$

2) En déduire

a. qu'il existe un unique réel $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $g(\beta) = -2010$

b. que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : g(x) = 1 - \tan x$

EXERCICE N°7

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $Z^2 - 2Z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} .

2) Soit $\theta \in]0, \pi[$ on donne $Z_1 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ et $Z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$

Montrer que $Z_1 =$ Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.

3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct les points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2

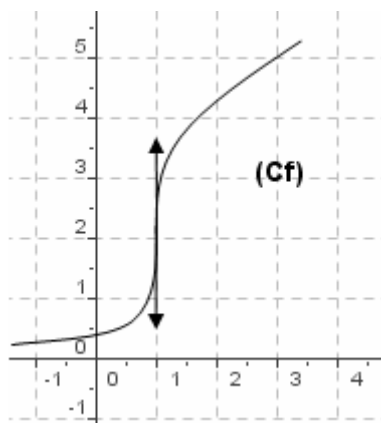
a) Montrer que $\frac{Z_2}{Z_1} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}}$

En déduire la nature du triangle OM_1M_2

b) Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M_1 lorsque θ décrit $]0, \pi[$,

4)



a. f une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$

b. f dérivable en 1

c. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = +\infty$

S

NOMBRES COMPLEXES

4^{ème} M

Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. On considère l'équation : $(E_\theta) : Z^2 - (2i + e^{i\theta})Z - 1 + ie^{i\theta} = 0$.

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .



2) On pose $Z_1 = i + e^{i\theta}$

a) Prouver que $Z_1 \cdot e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$

b) En déduire la forme exponentielle de Z_1 .

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $e^{i\theta}$; Z_1 et i .

a) Prouver que OABC est un losange.

b) Montrer que $OB \cdot AC = 2\cos\theta$

c) En déduire θ pour que l'aire du losange OABC soit égale à $1/2$.

4) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^4 - (2i + 1)Z^2 - 1 + i = 0$.

EXERCICE N°2

Soit $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$

1) Vérifier que $1 + \sin(2\theta) = (\cos\theta + \sin\theta)^2$

2) On considère dans \mathbb{C} l'équation $E_\theta : (1+i)Z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)Z + 1 - i = 0$

On note Z' et Z'' les solutions de l'équation E_θ

a) Sans calculer Z' et Z'' , montrer que $Z' \cdot Z'' = -i$

En déduire une relation entre $\text{Arg}(Z')$ et $\text{Arg}(Z'')$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation E_θ et écrire Z' et Z'' sous forme exponentielle.

3) On considère les points $A(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $B(-\sin\theta - i\cos\theta)$

Déterminer θ pour que $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \pi/3 [2\pi]$

En déduire alors la nature du triangle OAB pour la valeur de θ trouvée.

EXERCICE N°3

Soit $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$

On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E) : Z^2 - (2\cos\theta)Z + 2(1 - \sin\theta) = 0$

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

2) On note M_1, M_2 et M les points d'affixes resp $Z_1 = e^{i\theta} - 1, Z_2 = \overline{Z_1}$ et $Z = 2\cos\theta$

a) Ecrire Z_2 sous forme exponentielle. En déduire que $Z_2/Z_1 = e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}$

b) Montrer que le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange et préciser la valeur de θ pour laquelle ce quadrilatère est un carré.

c) Déterminer les ensembles (γ) et (γ_1) des points M et M_1 lorsque θ varie dans $]-\pi/2, \pi/2[$

EXERCICE N°7

) On considère dans \mathbb{C} l'équation $E_\theta : (1+i)Z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)Z + 1 - i = 0$

On note Z' et Z'' les solutions de l'équation E_θ

a) Sans calculer Z' et Z'' , montrer que $\text{Arg}(Z') + \text{Arg}(Z'') = -i$

b)

(Ch) est la courbe représentative d'une fonction h définie sur \mathbb{R} .

1) Déterminer les limites éventuelles suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \text{ et } h(2)$$

2) Déterminer l'image par h de chacun des intervalles $]-\infty, 0]$, $]-\infty, 2]$, $]2, +\infty[$ et \mathbb{R}

3) Montrer que l'équation (E) : $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1, 0[$

4) Soit $g(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$

Déterminer :

a. $h \circ g(0)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ h(x)$

Exercice N°3

(5points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) , On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$

1)a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D

b. Placer alors les points A, B, C et D dans le repère (o, \vec{u}, \vec{v})

2)a. Déterminer l'affixe du milieu du segment de $[AC]$, celui du segment $[BD]$

b. Déterminer un argument de $\frac{z_B}{z_A}$

3) En déduire la nature du quadrilatère ABCD

Exercice N°4

(6points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) , On note A, B, les points d'affixes respectives $z_A = -1$, B d'affixe $z_B = 2i$

A tout point M d'affixe z différent de -1 , on associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = \frac{z - 2i}{z + 1} \text{ pour } z \neq -1$$

1)a. On pose $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des réels

exprimer la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z' en fonction de x et y .

b. Déterminer alors l'ensemble E des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire

2) Retrouver géométriquement l'ensemble E en utilisant les points A et B

3) a. pour $z \neq -1$, calculer $|z' - 1| \cdot |z + 1|$

b. En déduire que si $M \in \zeta_{(A, 2)}$ alors M' parcourt un cercle que l'on précisera

PROBLEME

EXERCICE N°2

A) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$

1) Dresser le tableau de variation de f .

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0,2]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,2]$ sur $I = [-1/4, +\infty[$.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ puis justifier que g^{-1} est continue sur I .

c) Montrer que pour tout $x \in I$, $g^{-1}(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1+4x}}$

d) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes de g et g^{-1} .

B) On définit sur \mathbb{N} la suite (U_n) par :
$$\begin{cases} U_0 = 3/2 \\ U_{n+1} = 2 + g(U_n) \end{cases}$$

1) On pose $\psi(x) = 2 + g(x)$ pour tout $x \in [3/2, 2]$

a) Montrer que l'équation $\psi(x) = x$ admet dans $]3/2, 2[$ une solution unique α

b) Montrer que pour tout $x \in [3/2, 2]$, $\psi(x) \in [3/2, 2]$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3/2, 2]$.

b) Montrer que si la suite U converge alors sa limite est α .

EXERCICE N°3

1) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}$

1) Montrer que g réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 0[$

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + 1 - \frac{x}{2}$

a) Etudier les variations de f

b) Montrer que f est bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout $x \in I$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x$

EXERCICE N°4

3) Tracer les courbes de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

4)

5) a) Etudier les variations sur $]0, \pi/2]$ de la fonction φ définie par $\varphi(x) = g(x) - x$.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que $g(\alpha) = \alpha$.

d) Montrer que $\alpha \in]\pi/6, \pi/3[$

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (ζ_f) et $\Delta : y = x$.

6) Tracer (ζ_f) , Δ et les asymptotes de (ζ_f) dans le repère (o, \vec{i}, \vec{j})

7) a) Montrer que la restriction h de f à $[1, +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ et tracer sa courbe dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur $I =]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

- 1) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe.
- 2) Montrer que f réalise une bijection de I sur I . $g(x) =$
- 3) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . Expliciter pour tout x de I , $f^{-1}(x)$.

4) Soit g la fonction définie sur $]0, 1/2]$ par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{2}{\cos \pi x}\right) & \text{si } x \neq 1/2 \\ g(1/2) = 2 \end{cases}$

- a) Montrer que pour tout x de $]0, 1/2]$, $g(x) = 2/\sin(\pi x)$
- b) Montrer que g réalise une bijection de $]0, 1/2]$ sur un intervalle J que l'on précisera
- c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]2, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

PROBLEME

A/ Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ On désigne par (C) sa courbe

représentative dans un repère orthonormé.

- 1.a) Etudier les variations de f .
- b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 0.
- 2.a) Montrer que l'équation : $f(x) = 3x$ admet dans $[-1, +\infty[$ une unique solution α .
- b) Justifier que $\alpha \in]0, 1[$.
- 3) Tracer la courbe (C).

B/

Soit U la suite définie par : $U_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1/3 f(U_n)$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$
- 2) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $|f'(x)| \leq 2$
- 3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq (2/3) |U_n - \alpha|$
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq (2/3)^n |U_0 - \alpha|$
- c) Déterminer la limite de la suite U .
- 4) Soit la suite V définie sur \mathbb{N}^* par : $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |U_k - \alpha|$

Montrer que la suite V converge vers le réel 0.

C/

Soit la fonction g définie sur $[-\pi/4, \pi/2]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg} x) & \text{si } x \neq \pi/2 \\ g(\pi/2) = 0 \end{cases}$

- 1) Vérifier que pour tout $x \in [-\pi/4, \pi/2]$ on a : $g(x) = 1 + \sqrt{2} \cos(x + \pi/4)$
- 2) Etudier les variations de g et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.
- 3) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.
- 4) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur l'intervalle I puis calculer $(g^{-1})'(x)$.

5) Tracer, dans le repère contenant la courbe de g , celle de g^{-1} .

