Délégation régionale de Zaghouan : Lycée Ennozha	Devoir de synthèse N I $4^{ème}$ technique 2	Prof : M^r : Yahyaoui Durée 2heures Année : 2010-2011

Exercice 1(4 points)

Pour chaque question, une seule est exacte

1) Soit dans C l'équation (E) : z^2-miz+1=0 où m est un réel non nul. On a alors les solutions de De 'équation (E) qui sont :

a) réelles	b) opposées	c) inverses

2) Les racines carrées de $\frac{2}{i}$ sont :

a) $\frac{\sqrt{2}}{i}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{i}$	b) 1-i et -1+i	c) $\sqrt{2}i$ et-$\sqrt{2}i$

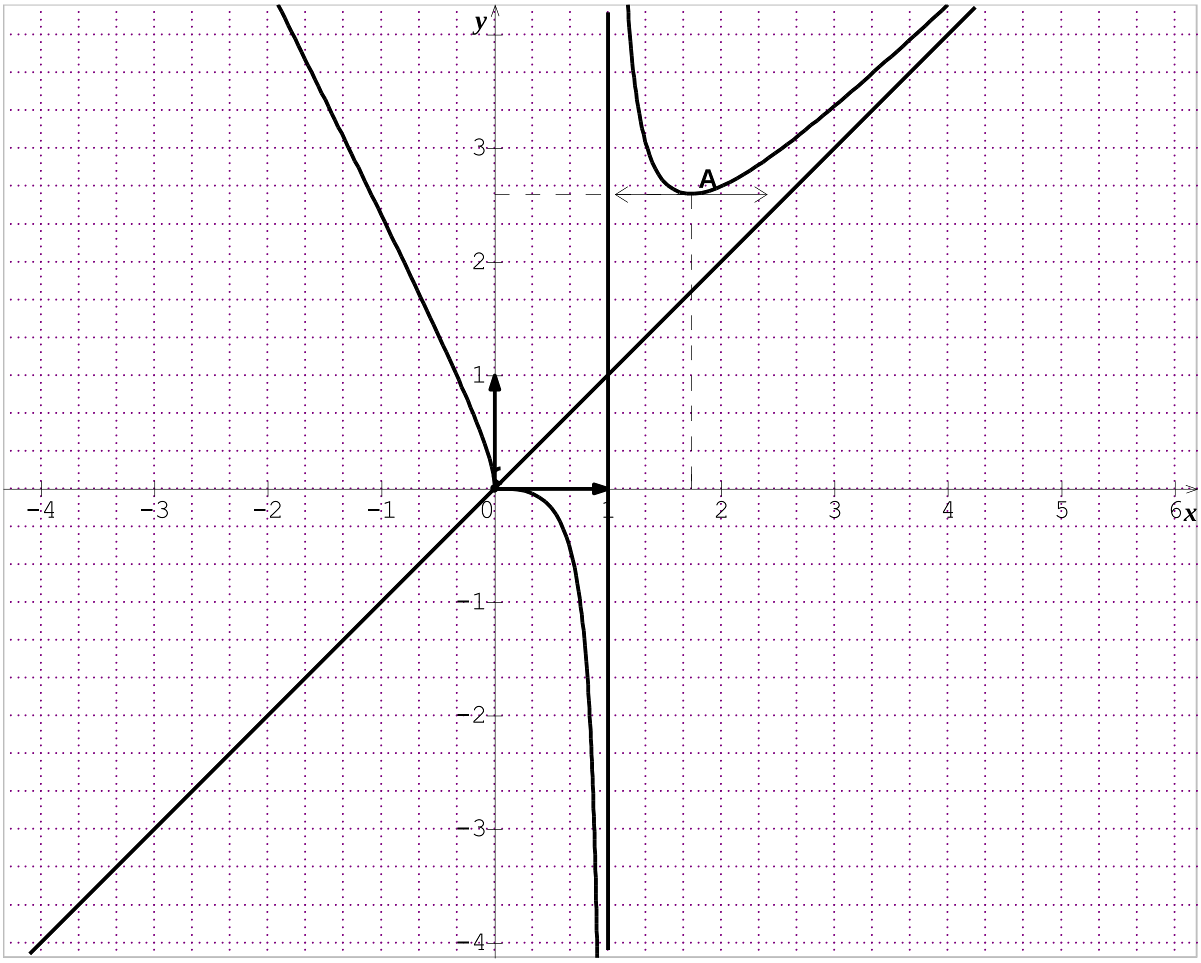
3) -1+i$\sqrt{3}$ est une racine cubique de :

a) -8i	b) 8i	c) 8

4) La dérivée de la fonction f(x) =$x^2\sin(\frac{1}{x})$ sur IR|{ 0} est :

a) $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos(\frac{1}{x})$	b) $-2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos(\frac{1}{x})$	c) $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos(\frac{1}{x})$

Exercice 2(5 points)



Dans le graphique ci-dessus ;on a représenté la courbe (C_f) d'une fonction f définie sur IR/{1}

La droite Δ : y=x est une asymptote à (C_f) au voisinage de+∞ ; (C_f) admet une tangente horizontale au point A($\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}$)

Utiliser le graphique pour répondre :

1) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x})$, $\lim_{x\to0^+}(\frac{f(x)}{x})$; $\lim_{x\to0^-}(\frac{f(x)}{x})$, $\lim_{x\to1^+} f(x)\sin(\frac{1}{f(x)})$
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]1,\sqrt{3}\right]$
   a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]1,\sqrt{3}\right]$ sur un intervalle J à déterminer
   b) Déterminer le sens de variation de g^{-1} sur J
   c) g^{-1} est-t-elle dérivable à droite de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
   d) $Tracer$ la courbe de g^{-1}

Exercice 3(5 points)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par f(x)=$\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer f'(x)

   b)Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que α∈$\left]1,\sqrt{2}\right[$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer

   b) f^{-1} étant la fonction réciproque de f expliciter $f^{-1}(x)$ $x\in J$

   c) Montrer que pour tout x∈ $[1,+\infty[$ $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$ et que|f(x)-α|≤$\frac{1}{2}$|x-α|

Exercice4 (6 points)

C désigne l'ensemble des nombres complexes, f(z) le polynôme complexe défini par :

$$f(z)=z^3-(3+i)z^2+12iz+4i+12$$

1) a) Ecrire sous forme algébrique $(5-3i)^2$
   b) Résoudre l'équation : $z^2-(3-i)z-2+6i=0$
2) a) Montrer que l'équation $f(z)$=0 admet une solution imaginaire que l'on déterminera
   Résoudre alors l'équation $f(z)$=0
3) Dans le plan complexe rapporté orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 2i , -1+i et 4-2i
   a) Ecrire -1+i et 2i sous forme exponentielle puis en déduire sous forme algébrique $(\frac{-1+i}{2i})^{12}$
   b) Calculer $\frac{z_A-Z_C}{Z_A-Z_B}$puis en déduire que A , B et C sont sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon
   c) Vérifier que le point D d'affixe 3-3i est sur ce cercle
4) Pour tout M du plan D'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que z'= (1-3i)z+4i
   a) Montrer que $\frac{Z'_{M'}-Z_A}{Z_M-Z_A}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis la nature du triangle AMM'