Site web : http://www.matheleve.net
Email1 : contact@matheleve.net
Email2 : matheleve@gmail.com

Devoir de Synthèse n°01

Lycée Ali Bourguiba Bembla	4 ème Tech1 et 3	Mercredi 05-12-2012	Chortani et Chaouch

Exercice 1(3 points)

Répondre par vrais ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\ \sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

2)$1 + i\sqrt{2012}$ est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 2013 = 0$

3)Un argument de nombre complexe $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$ est $-\frac{\pi}{5}$

Exercice 2 (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+4} - 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1)a)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout $x < 0$, $\frac{1}{x} < f(x) < -\frac{1}{x}$

c)En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la continuité de f sur $[0\ ;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;+\infty[$

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\ ; +\infty[$.

e) Vérifier que : $3<\alpha<3{,}5$.

3) Soit g la restriction de f sur $[0\ ;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\ ;+\infty[$ sur $[-2 +\infty[$.

b) Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x.

c) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

Exercice 3 (6 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E: z^2 + 2z + 2 = 0$

2)a) Montrer que pour tout réel θ on a : $1 + 2i\, sin\theta\, e^{i\theta} = e^{2i\theta}$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_\theta: z^2 + 2z - 2i\, sin\theta\, e^{i\theta} = 0$

c) On suppose dans cette question que $\theta \in]0; \pi[$

Donner les solutions de E_θ sous forme exponentielle.

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives -2 , $z_B = e^{i\theta} - 1$ et $z_C = -1 - e^{i\theta}$ tel que $\theta \in]0; \pi[$

a) Montrer que B et C sont symétriques par rapport à un point fixe I .

b) Calculer OA et BC en déduire que OBAC est un rectangle.

c) Trouver θ pour que OBAC soit un carré.

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par : $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x - x^2}}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats

2)a)Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{2(x - x^2)\sqrt{x - x^2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; 1[$

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0; 1[$ sur un intervalle que l'on déterminera .

4) Tracer dans un repéré orthonormé les courbes représentatives de f et de sa fonction réciproque .