DEVOIR DE SYNTHESE N°1

EXERCICE 1 :

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3i$, $-3-i$ et $2{,}08+1{,}98i$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle

(c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par :

$z' = \dfrac{z-4i}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite

(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle **(b)** : une droite

(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

4. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$.

$(a) : (f^{-1})'(1) = 1$ $(b) : (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$

$(c) : (f^{-1})'(1) = \frac{1}{4}$ $(d) : (f^{-1})'(1) = -\frac{1}{2}$

EXERCICE 2 :

On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right); \quad z_2 = 4; \quad z_3 = 2\left(1 + e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)$$

On appelle M_1, M_2, M_3 leurs images respectives dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_3.

2) Placer les points M_1, M_2, M_3 dans le plan (P) (utiliser la feuille annexe).

3) a) Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

$z_1 - 2$; $z_2 - 2$; $z_3 - 2$

b) En déduire que les trois points M_1, M_2, M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est un triangle rectangle.

EXERCICE 3 :

Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$par : $g(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2,3[$.

2. Montrer que pour tout $x \in [2,3]$; $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

3. Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que $\forall\, n \in IN$; $2 \leq U_n \leq 3$.

b) Utiliser l'inégalité des accroissements finis et montrer que pour tout $n \in IN$ on a :

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout n de IN on a, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

On a représenté dans la <u>feuille annexe</u> la courbe (C) de f dans le repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.a. Par une lecture graphique : prouver que f est une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.

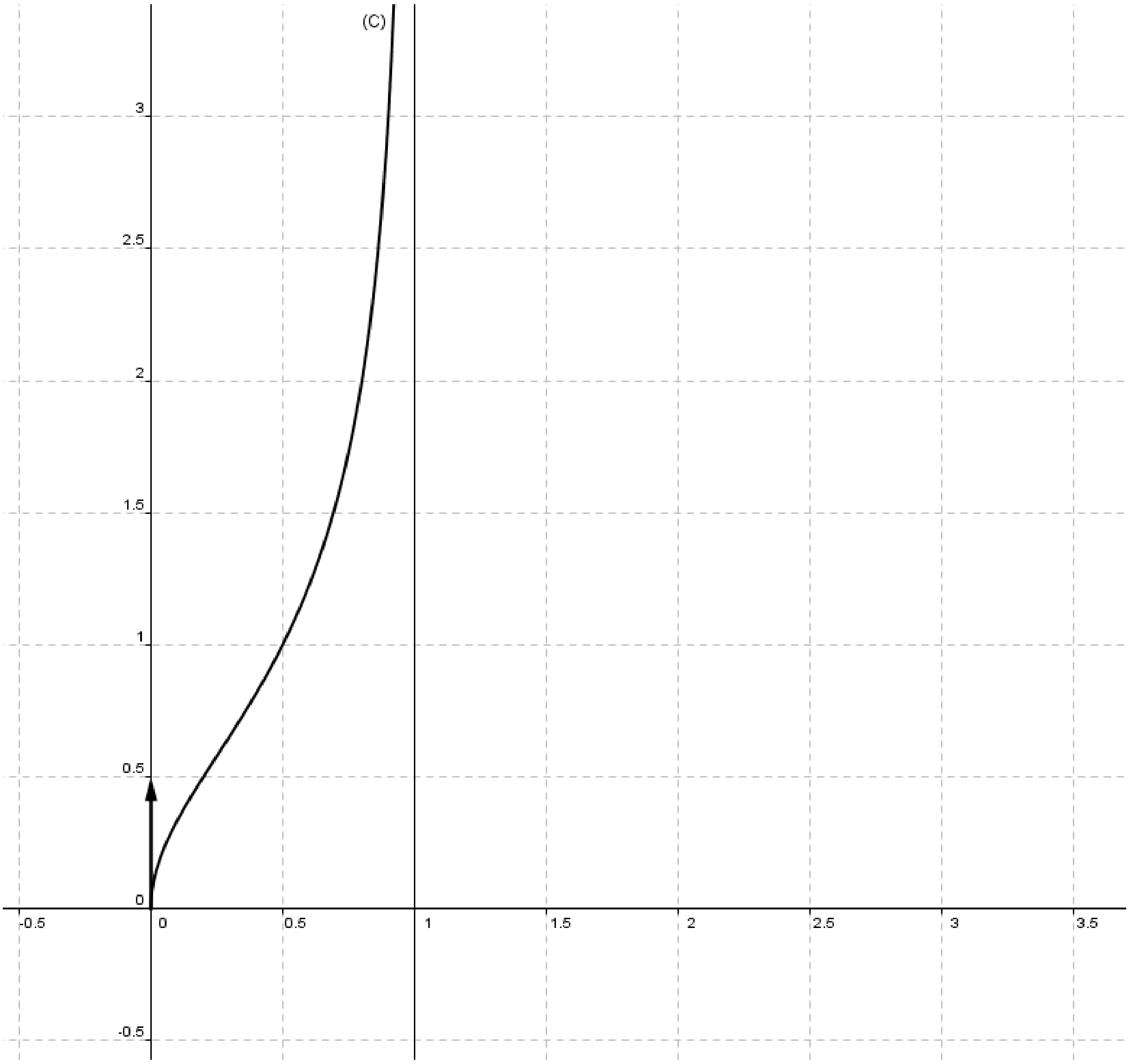
c. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ J.

2. Déterminer puis tracer l'équation de la tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0,5.

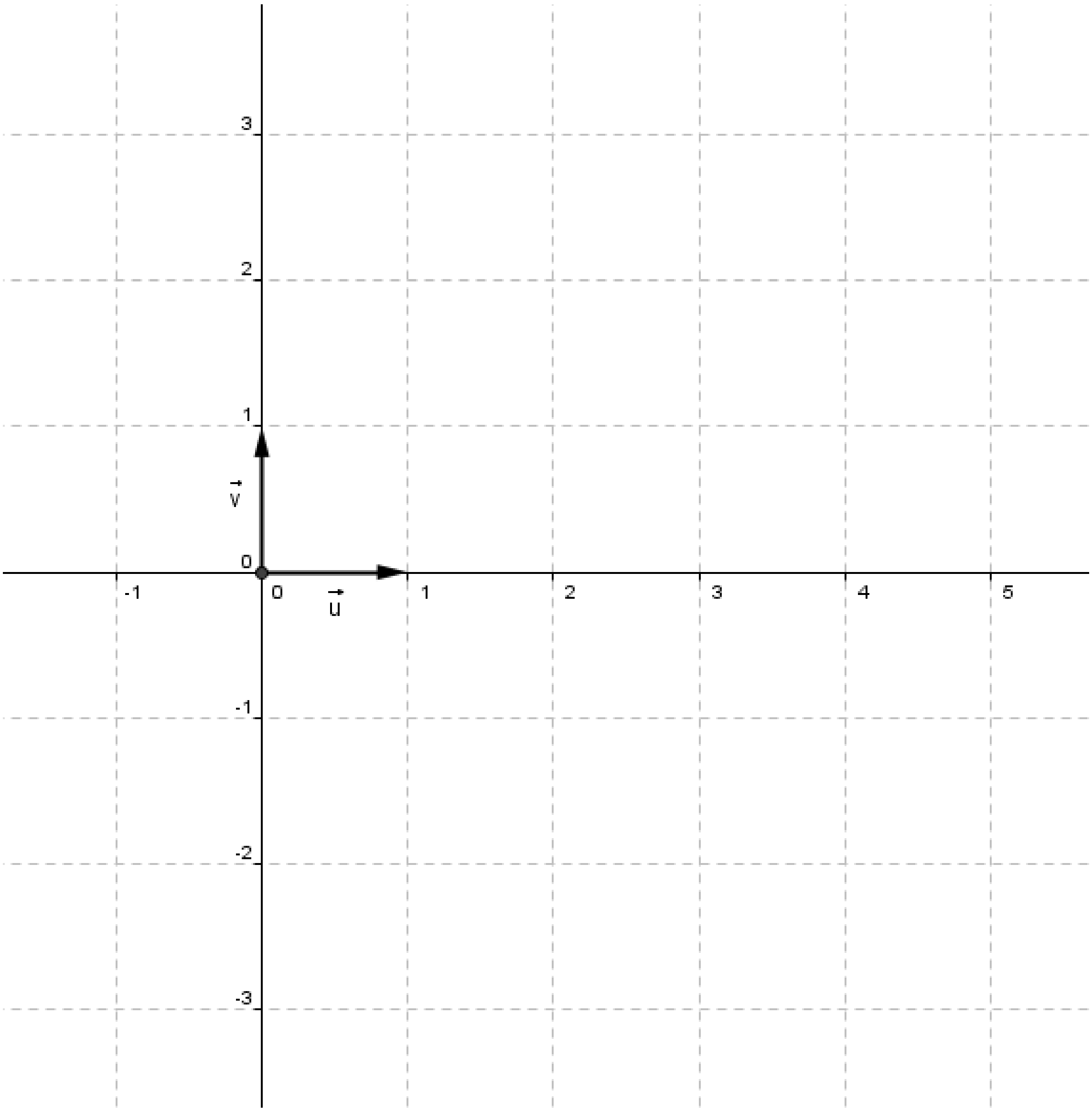
3. Soit la fonction F définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = f(sinx)$.

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.



DEVOIR DE SYNTHESE N°1



DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Riadh ZAGHOUANI