Lycée Houmet Souk 1	Devoir de Synthèse N : 1	4 Technique 5
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	10 - 12 - 2014

EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , indiquer la seule réponse correcte .

1) Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ sachant que f est une bijection de $]2;+\infty[$ sur $]1;+\infty[$ alors :

a) $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **b)** $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$ **c)** $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

2) Les racines quatrièmes de $(16i)$ sont :

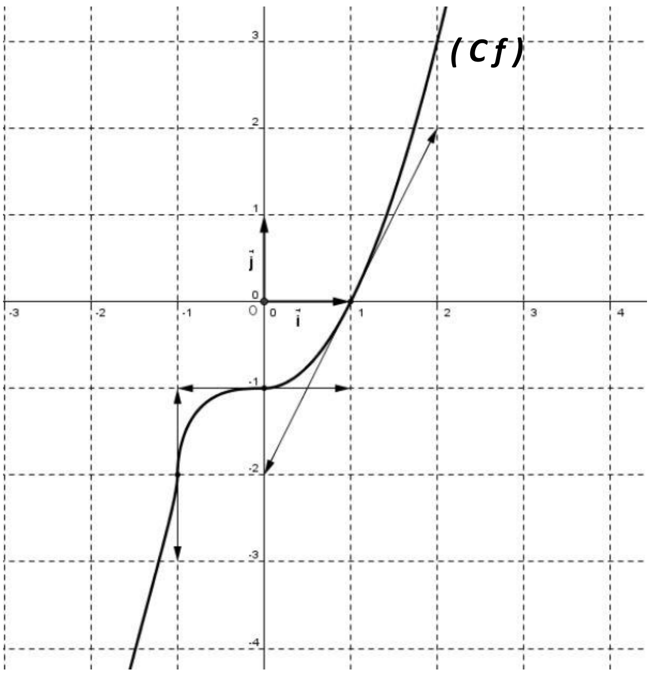
a) $\begin{cases} Z_k=2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)} \\ k\in\{1,2,3,4\} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} Z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)} \\ k\in\{1,2,3,4\} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} Z_k=2e^{i\left(\frac{\pi+k}{8}\right)} \\ k\in\{1,2,3,4\} \end{cases}$

3) Z_1 et Z_2 sont deux nombres complexes **inverses** vérifiant : $Z_1+Z_2=1+2i$.

Z_1 et Z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

a) $Z^2-(1+2i)Z-1=0$ **b)** $Z^2-(1+2i)Z+1=0$ **c)** $Z^2+(1+2i)Z+1=0$

EXERCICE N : 2 (3.5 points)



1) Justifier que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera .

2) En utilisant le graphique déterminer :

a) Le domaine de dérivabilité de f^{-1}.

b) Déterminer : $f'(1)$; $f''(0)$; $(f^{-1})'(0)$

$(f^{-1})'(-2)$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)+2}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f^{-1}(x)}{x+1}$.

EXERCICE N : 3 (6 points)

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : **(E)** $2Z^2-(\sqrt{3}+1)(1+i)Z+2i=0$.

1) Vérifier que : $[(\sqrt{3}+1)(1+i)]^2-16i=[(\sqrt{3}-1)(1-i)]^2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** .

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives : $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\boldsymbol{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexe **a** et **b** .

b) Vérifier que : $\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}$.

c) Déduire les racines carrées du nombre complexes **a** .

2) *Soit C le point d'affixe* $\boldsymbol{c = a + b}$

a) *Placer les points A , B et C*

b) *Vérifier que :* $\boldsymbol{c} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) *On considère dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $\boldsymbol{(E')}$ $Z^2 + Z - \boldsymbol{c} = 0$.

a) *Vérifier que* $\boldsymbol{b}$ *est une solution de* $\boldsymbol{(E')}$.

b) *On désigne par* $\boldsymbol{d}$ *l'autre solution de* $\boldsymbol{(E')}$ *. Prouver que :* $\boldsymbol{d} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\, e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

c) *Placer le point D d'affixe* $\boldsymbol{d}$.

EXERCICE N : 4 (7.5 points)

A) *Soit la fonction f définie sur* $[1 ; +\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$.

On désigne par **(Cf)** *sa courbe représentative dans le repère orthonormé* $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) *Prouver que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ *et interpréter graphiquement ce résultat.*

2) a) *Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 . (Interpréter graphiquement le résultat obtenu) .*

b) *Justifier que f est dérivable sur* $]1 ; +\infty[$ *et que* $f'(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

c) *Dresser le tableau de variations de f .*

3) a) *Montrer que f réalise une bijection de* $[1 ; +\infty[$ *sur* $[1 ; 2[$.

b) *Justifier que* f^{-1} *est dérivable à droite de 1 .*

4) *Expliciter* $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in [1 ; 2[$.

B) *Soit la fonction g définie sur* $[0 , \frac{\pi}{2}]$ *par :* $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ *et* $g(x) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$ *si* $x \in [0 , \frac{\pi}{2}[$.

1) *Montrer que pour tout* $x \in [0 , \frac{\pi}{2}]$; $g(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$.

2) *Justifier que g admet une réciproque* g^{-1} *définie sur* $[\frac{1}{2} , 1]$.

3) *Montrer que* g^{-1} *est dérivable sur* $]\frac{1}{2} , 1]$ *et que* $(g^{-1})'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{2x-1}}$.

Bonne chance