4 ème Tech 2@3	Devoir de SYNTHESE N*1	
Lycée Ibn Khaldoun La Skhira		
12/12/2015 Durée : 2 heures	Mathématiques	Prof : SAEMONGI

Exercice 1 (3 points)

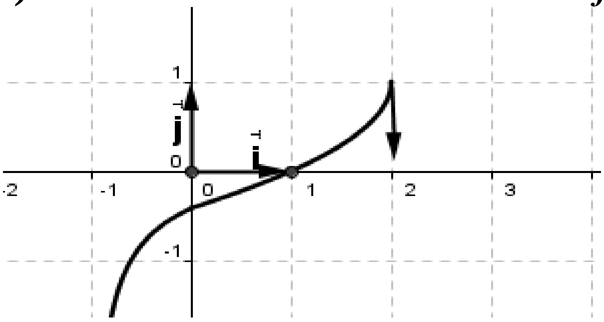
Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est exacte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie :

1) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel que g (1)=2 alors :

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty} g\left(\frac{x-1}{x}\right)=+\infty$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} g\left(\frac{x-1}{x}\right)=2$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} g\left(\frac{x-1}{x}\right)=1$

2) La courbe ci dessous est celle d'une fonction f continue sur $]-1,2]$ alors :



a) $\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-1}{x-2}=+\infty$ ***b)*** $\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-1}{x-2}=-\infty$ ***c)*** $\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-1}{x-2}=2$

3) Soit f une fonction définie sur [0 ;1] par : $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ ***alors sa fonction réciproque sur [0 ;1] est :***

a) $f^{-1}(y)=1+\sqrt{2y-y^2}$ ***b)*** $f^{-1}(y)=1-\sqrt{1+y^2}$ ***c)*** $f^{-1}(y)=1-\sqrt{1-y^2}$

Exercice 2 (5 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+3i)z-2+i=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) On pose $f(z)=z^3-(2+3i)z^2+(4i-1)z+2-i$

a) Montrer que l'équation f (z)=0 admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle que l'on déterminera

b) Déterminer les complexes b et c tels que $f(z)=(z-1)(z^2+bz+c)$ ***quelque soit z $\in\mathbb{C}$***

c) Résoudre alors l'équation $f(z)=0$

3) Soit dans le plans muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

les points A ; B et C d'affixes respectives 1+2i ; i et 1.

a) placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'aire du trapèze OBAC.

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $I = \left]-\infty, 0\right[$ par $f(x) = x + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a. Justifier que f est dérivable sur I.

   b. Montrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2x^2.\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$ pour tout x appartient à I.

2) a. Déterminer $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Déterminer une équation de l'asymptote Δ de C_f au voisinage de $-\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur I.

4) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans sur $\left](-2);(-1)\right[$ une unique solution α

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.

   c. En déduire le signe de f.

5) Montrer que $\alpha = \dfrac{1}{1-\alpha^2}$.

6) a) Montrer que f est une bijection de $\left]-\infty, 0\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Calculer $f^{-1}(0)$ et montrer que f^{-1} est dérivable en 0 .

   c) Montrer que $(f^{-1})'(0) = 1 - \dfrac{1}{2\alpha^3}$.

Exercice 4 (6 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

On considère les points A(1,1,0) , B(1,0 , 1) et C(0 , 1 , 1) .

1. Montrer que les points A;B et C ne sont pas alignes
2. Donner une équation cartésienne de (ABC)
3. Vérifier que O ∉ (A B C) et que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ n' est pas un vecteur de (ABC).
4. Soit P le plan d'équation : $x - y + \sqrt{2}\,z + 2 - \sqrt{2} = 0$.

a. Montrer que (ABC) et P sont sécants suivant une droite Δ

b. Donner une représentation cartésienne et paramétrique de la droite Δ.

c. soit $\Delta_1 \begin{cases} x = 2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\beta \\ y = 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\beta \\ z = 0 \end{cases}$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ une représentation paramétrique de Δ_1

Montrer que $\Delta \perp \Delta_1$.

bon travail