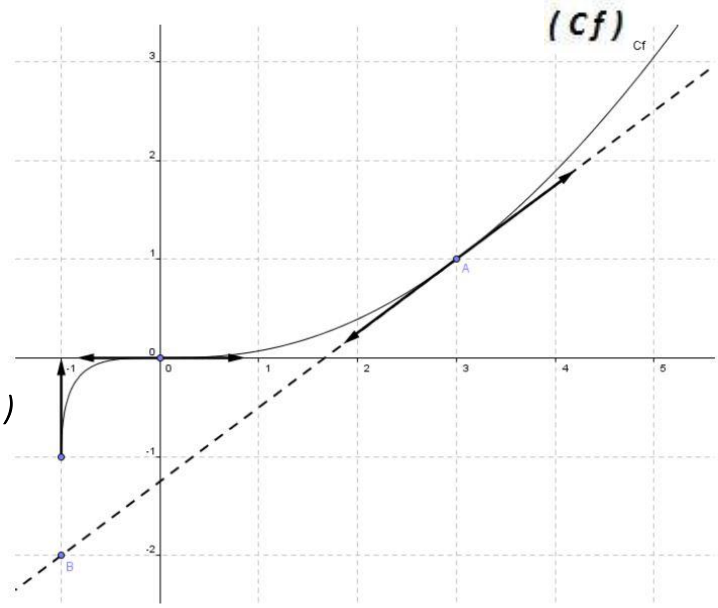
Lycée Houmet Souk	Devoir de Synthèse N : 1	4 Techniques 1
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 3 Heures	04 - 01 - 2017

EXERCICE N : 1 (2.5 points)



La courbe **(C f)** ci-contre représente une fonction f définie sur $[-1 ; +\infty [$.

1) Justifier que f est une bijection de $[-1 ; +\infty [$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2) Déterminer : $f'(3)$; $(f \circ f)'(0)$; $f^{-1}([-1 ; 1[)$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} \frac{f^{-1}(x)-3}{x-1} \quad .$$

3) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]0 , 1[$ vérifiant : $(f^{-1})'(\alpha) = 3$.

EXERCICE N : 2 (4 points)

L'espace (ξ) est rapporté à un repère orthonormé $R(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ .On donne les points

$A(3 , 2 , 2)$; $B(0 , 2 , 1)$ et $C(0 , 1 , 1)$ et la droite : $\Delta : \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 4 + \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$; $(\alpha \in IR)$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

b) Montrer que la droite (AB) et Δ ne sont pas coplanaires .

2) a) Montrer que les points A , B et C forment un plan .

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

3) Donner une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite (AB) en A .

4) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D parallèle à (AB) et passant par C .

b) En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point C sur le plan P .

c) Déduire la distance $d(C , P)$.

d) Retrouver autrement la distance $d(C , P)$.

5) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .

b) En déduire la nature quadrilatère ABCH .

EXERCICE N : 3 (3 .5 points)

Soit la fonction définie sur [0 ; 1] par : $g(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1) *Etudier les variations de* g *sur* $[0 ; 1]$.

2) *Déduire que la fonction* g *admet une réciproque* g^{-1} *définie sur* $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

3) a) g^{-1} *est-elle dérivable à gauche de* $\frac{1}{2}$. *(Justifier la réponse)*

b) *Justifier que la fonction* g^{-1} *est dérivable sur* $\left[0 ; \frac{1}{2}\right[$.

4) a) *Calculer* $g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ *et* $(g^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)$.

b) *Montrer que pour tout* $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right[$, $(g^{-1})'(x) = -\frac{4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$.

EXERCICE N : 4 (4.5 points)

1) a) *Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe* $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

b) *Ecrire sous forme algébrique les racines quatrième de* $(-2 + 2i\sqrt{3})$.

2) *Soit* $f(Z) = Z^2 + (1 - 2i\sqrt{3})Z - 2 + 2i\sqrt{3}$ *où* Z *est un nombre complexe* .

a) *Calculer* $f(1)$.

b) *Déterminer alors les solutions de l'équation* $f(Z) = 0$.

c) *Déduire dans □ les solutions de l'équation :* $Z^8 + (1 - 2i\sqrt{3})Z^4 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

3) *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *On considère les points* $A_{(1)}$, $B_{(-2+2i\sqrt{3})}$ *et* C *d'affixe* Z_C *tel que* $Re(Z_C) = \frac{5}{2}$ *et* $\arg(Z_C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

a) *Placer les points A , B et C (laisser les traces de constructions apparentes) .*

b) *Calculer* $|Z_C|$ *puis déduire que* $Z_C = \frac{5}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

4) a) *Prouver que* $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) *Déduire alors la nature du triangle ABC (Justifier) .*

EXERCICE N : 5 (5.5 points)

A) *On considère la fonction* f *définie sur* $]0\,;+\infty[$ *par :* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x\in]0\,;1[\\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in[1\,;+\infty[\end{cases}$

On désigne par ***(C f)*** *sa courbe représentative dans le repère orthonormé* $\mathbf{R}\,(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) *Vérifier que* f *est continue en* 1 .

b) *Etudier dérivabilité de* f *à droite et à gauche de 1 . Interpréter graphiquement les résultats .*

2) a) *Dresser le tableau de variations de* f *sur* $]0\,;+\infty[$.

b) *Montrer que la droite* $\Delta : y=x$ *est une asymptote à* ***(C f)*** .

c) *Préciser la position de* ***(C f)*** *par rapport à* Δ *sur* $[1\,;+\infty[$.

d) *Tracer la droite* Δ *et la courbe* ***(C f)*** *dans le repère* ***R*** .

3) a) *Montrer que* f *réalise une bijection de* $]0\,;+\infty[$ *sur un intervalle* ***J*** *que l'on précisera .*

b) *Déterminer* $(f^{-1})'(0)$.

4) a) *Tracer la courbe* $\mathbf{(C f^{-1})}$ *dans le même repère* ***R***

b) *Montrer que pour tout* $x\in]-\infty\,;0]$, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.