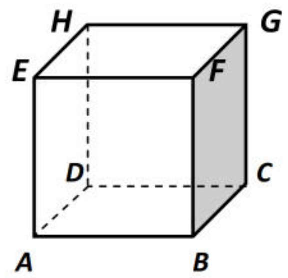
Lycée Houmet Souk	*Devoir de Synthèse N : 1*	*4 Sc 3 & 4 Tec 3*
Prof : Loukil Mohamed	*Durée : 2 Heures*	*24 - 01 - 2018*

EXERCICE N : 1 (3 points)



ABCDEFGH est un cube d'arête 1 .

Pour chacune des questions suivantes , une seule des trois réponses proposées est exacte .

Sans justification ,le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EG}$ *est égal à :*

a) $\vec{0}$ **b)** 2 **c)** 0

2) *(* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HF}$ *) est normal au plan*

a) *(EFG)* **b)** *(ABH)* **c)** *(ABE)*

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ *est égal à :*

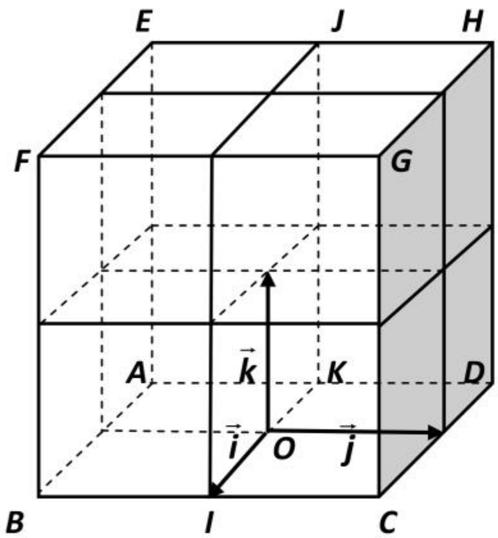
a) $\sqrt{2}\ \overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AE}$ **c)** $\vec{0}$

EXERCICE N : 2 (5 points)

ABCDEFGH *est un cube d'arrête* **2** .

On choisit le repère orthonormé direct **R** *(O ,* $\vec{i}$ *,* $\vec{j}$ *,* $\vec{k}$ *)*

où O le centre du carré ABCD . On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments [BC] , [EH] et [AD] .



1) *Déterminer selon le repère* **R** *les coordonnées des points*

I , K , A , F et J .

2) a) *On donne :* $\vec{N} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$. *Montrer que* $\vec{N} = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

b) *Calculer l'aire* $\mathcal{A}$ *du triangle AIJ .*

3) a) *Montrer que AFIJ est un tétraèdre .*

b) *Calculer le volume* **V** *du tétraèdre AFIJ .*

c) *Déduire la hauteur* **h** *du tétraèdre AFIJ issu du point F .*

4) *Soit* Δ *la droite passante par K et perpendiculaire au plan (AIJ) .*

a) *Donner une représentation paramétrique de la droite* Δ *.*

b) *Déterminer la distance du point A à la droite* Δ *.*

EXERCICE N : 3 (5 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2+4}{2U_n} \end{cases}$

1) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a : $U_n > 2$.*

2) a) *Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN .*

b) *Déduire que (U_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.*

3) *Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \ln\left(\dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}\right)$.*

a) *Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.*

b) *Exprimer (V_n) en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.*

c) *Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_n = \dfrac{2(e^{V_n}+1)}{1-e^{V_n}}$.*

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) *Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.*

1) a) *Dresser le tableau de variations de g .*

b) *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une unique solution α .*

c) *Vérifier que $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.*

2) *Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.*

B) *Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1-\ln x}{x}$.*

*On désigne par **(C f)** la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.*

1) a) *Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.*

b) *Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$.*

c) *Etudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.*

2) a) *Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à **(Cf)** .*

b) *Etudier la position relative de **(C f)** par rapport à Δ .*

3) *Tracer Δ et **(C f)** . **(On prend : $\alpha = 1{,}3$)***

4) *Déterminer la primitive F de h sur $]0 ; +\infty[$ tel que : $H(e) = \dfrac{1}{2}$.*

Bonne chance