Devoir De Synthèse N°2

Exercice N° 1 (3,25 pts)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3} \end{cases}$

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \le U_n \le 3$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) croissante.

b) Montrer que la suite (U_n) convergente.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice N° 2 (3,75 pts)

Soit (U_n) une suite à termes strictement positifs et (V_n) la suite définie par : $V_n = \dfrac{1}{U_n}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- Si la proposition est fausse donner un contre-exemple

1) Si la suite (U_n) est croissante alors la suite (V_n) est décroissante.

2) Si la suite (U_n) est minorée par 1 alors la suite (V_n) est majorée par 1.

3) Si la suite (U_n) est bornée alors la suite (V_n) est bornée.

4) Si la suite (U_n) est divergente alors la suite (V_n) converge vers 0.

5) Si la suite (U_n) converge alors la suite (V_n) converge.

Exercice N° 3 (4 pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(3,-2,2)$; $B(6,1,5)$; $C(6,-2,-1)$ et $D(0,4,-1)$.

1) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b) Soient les plans P est Q d'équations respectives : $P : x + y + z - 3 = 0$; $Q : x - z - 1 = 0$.

Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires.

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection de P et Q.

2) a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice N° 4 (3 pts)

Pour chacune des quatre propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse **en justifiant votre réponse**.

1) L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(e^x - 1)(e^x + 4) = 0$ est $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

2) Si $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n \leq 0,7$ alors $n \geq \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,99)}$

3) L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(5x + 9)$ est $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

4) $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}\right) = 0$.

Exercice N° 5 (6 pts)

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{2x} - 12e^x + 10$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x^2 - 12x + 10 \geq 0$

b) En déduire que $g(x) \geq 0 \iff x \in \left]-\infty\ ;\ 0\right] \cup \left[\ln 5\ ;\ +\infty\right[$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 12e^x + 10x + 11$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Calculer $f(0)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite $\Delta : y = 10x + 11$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $(-\infty)$

c) Etudier, sur $\left]-\infty, 0\right]$, la position de Δ par rapport à $\mathscr{C}_f$.

4) a) Calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$. (Unités graphiques : 4cm en abscisses et 1cm en ordonnées).

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans [2 ; 3].