Devoir De Synthèse N°2

Mathématiques

Exercice 1 (3 points)

• *Pour Chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La fonction $F(x)=\ln(2x+4)$ est une primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{2x+4}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

2) L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2\right)=2$ est

a) $\{e\}$ **b)** $\{-2\ ,\ 2\}$ **c)** $\{-e\ ,\ e\}$

3) La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n=-\ln(2^n)$ est

a) croissante **b)** décroissante **c)** ni croissante, ni décroissante

Exercice 2 (4 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(-1,1,1)$; $B(3,1,3)$, $C(1,0,1)$ et $I(1,3,1)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soient les deux plans P et Q d'équations :

$P: x+2y-2z+1=0$ et $Q: 2x+y+2z-1=0$.

a) Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires.

b) Vérifier que $A\in P\cap Q$.

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection de P et Q.

3) Soit S la sphère de centre I et de rayon 2.

a) Vérifier que S est tangente à la fois à P et Q.

b) Déterminer la distance du point I à la droite Δ.

Exercice 3 (5 points)

Soit (U_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n^{\ 2}}{2U_n-1}\end{cases}$

1) a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1}-1=\dfrac{(U_n-1)^2}{2U_n-1}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $U_n>1$.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n la suite (U_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{U_n}\right)$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (-x^2 + 3x + 4)e^{-x}$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier sur l'intervalle $[0, +\infty[$ la position relative de $(\mathscr{C})$ et Δ.

3) On admet que le tableau de variation de f est le suivant :

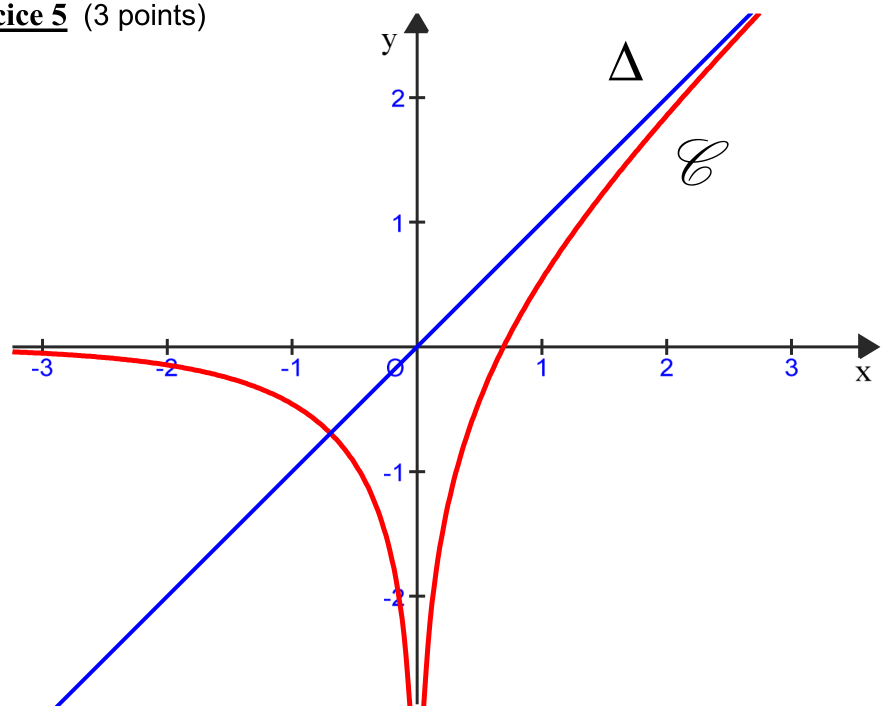
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
f(x)		↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	

Tracer Δ et $(\mathscr{C})$. (On prendra $\alpha \approx 1{,}9$ et $f(\alpha) \approx 2{,}8$).

4) Soit $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + (x^2 - x - 5)e^{-x}$

Montrer que $F(x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (3 points)



- La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessus représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.
- $\Delta : y = x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

1) En utilisant le graphique, déterminer :

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

b) Le tableau de variation de f.

2) On admet que $f(x) = \ln\left|e^x - 1\right|$

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et l'axe des abscisses.

b) Donner une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\ln 2$.