Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef
Habib Gammar
2009-2010

Devoir De Synthèse N°2

Mathématiques

$4^{\text{ème}}\ T_3$
3 Heures

Exercice 1 (3 points)

- *Pour Chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $\ell = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{xe^{x}}$ alors :

a) $\ell = 0$ b) $\ell = +\infty$ c) $\ell = -\infty$

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \dfrac{(-2)^{n+1}}{5^n}$, alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\dfrac{2}{5}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ c) (U_n) n'a pas de limite.

3) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit P le plan d'équation : $x+y+z+1=0$. alors :

La distance du point O au plan P est égale à :

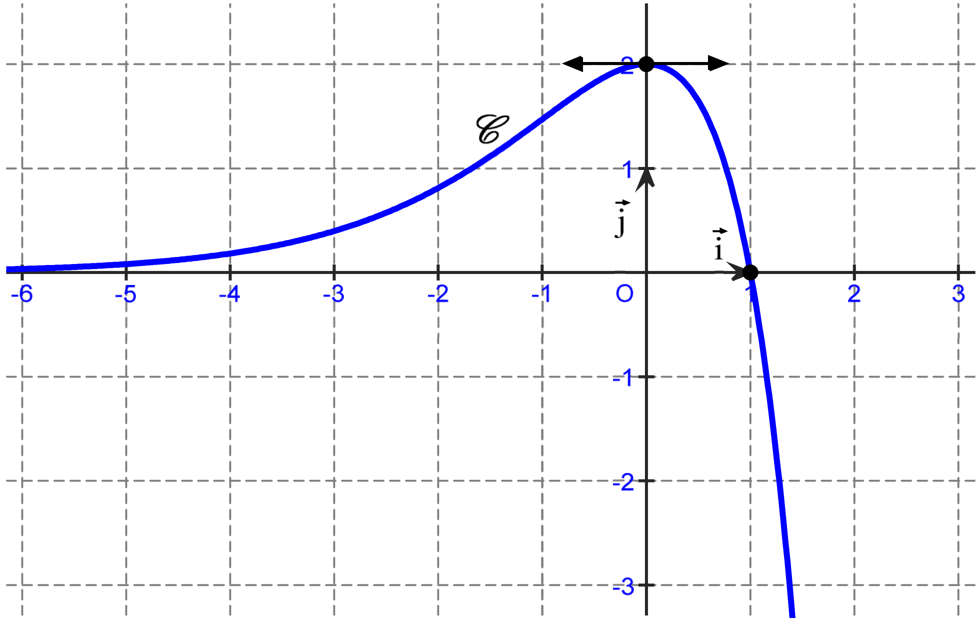
a) 1 b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 2 (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La courbe $(\mathscr{C})$ représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
- $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $f(1)$ et $f'(0)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) On admet que $f(x) = (ax+b)e^{cx}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

b) Déterminer a, b et c.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)(e^{-2x}+1)$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que $f'(x) = e^{-2x}(e^{2x} - 2x - 1)$

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f		$\nearrow$	

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x+1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

d) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

4) Tracer Δ et $(\mathscr{C})$.

<u>Exercice 4</u> (5 points)

Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}\left(2-x^2\right)$.

1) a) Montrer que $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[1,2]$

c) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

d) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $\left|f(x)-\sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|x-\sqrt{2}\right|$.

2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n on a :

$$\left|U_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|U_n-\sqrt{2}\right|.$$

c) En déduire pour tout entier naturel n on a : $\left|U_n-\sqrt{2}\right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d) Déterminer alors la limite de (U_n).

<u>Exercice 5</u> (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,1)$; $B(0,0,2)$; $C(-1,-2,2)$ et $D(2,2,2)$

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$2x - y + 2z - 4 = 0$$

2) a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

3) Soit S la sphère de centre D et de rayon 3.

Montrer que l'intersection de la sphère S avec le plan (ABC) est un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre H et le rayon r.