Mathématiques Lycée Ali Bourguiba Bembla		Devoir de synthèse°02	
Mr: Chaouch Faouzi	4 ème tech$_2$	Vendredi 07-03-2012	3Heures

Exercice 1(4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte
Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

1) Pour tout réel $x \neq 0$,on a : $x - ln(x^2)$ est égal à :

a) $x - 2\,ln(x)$ b) $x - ln^2(x)$ c) $x - 2\,ln|x|$

2) La valeur moyenne de $f : \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ sur $[-1; 1]$ est

a) $\ln(e + 1) - \ln(e^{-1} + 1)$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}(\ln(e + 1) - \ln(e^{-1} + 1))$

3)La limite de $\dfrac{x}{\ln(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ est egale à :

a)1 b)0 c)$+\infty$

4) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx =$ $a)\dfrac{1}{4}$ b) 4 c)e^3

Exercice 2(5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$

On donne les points A (1,0,0) ; B(0, 2, 0) et C (0, 0, 3).

1)a)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

2) Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et[AC]

On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur$\vec{k}$ et par Δ'

La droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$

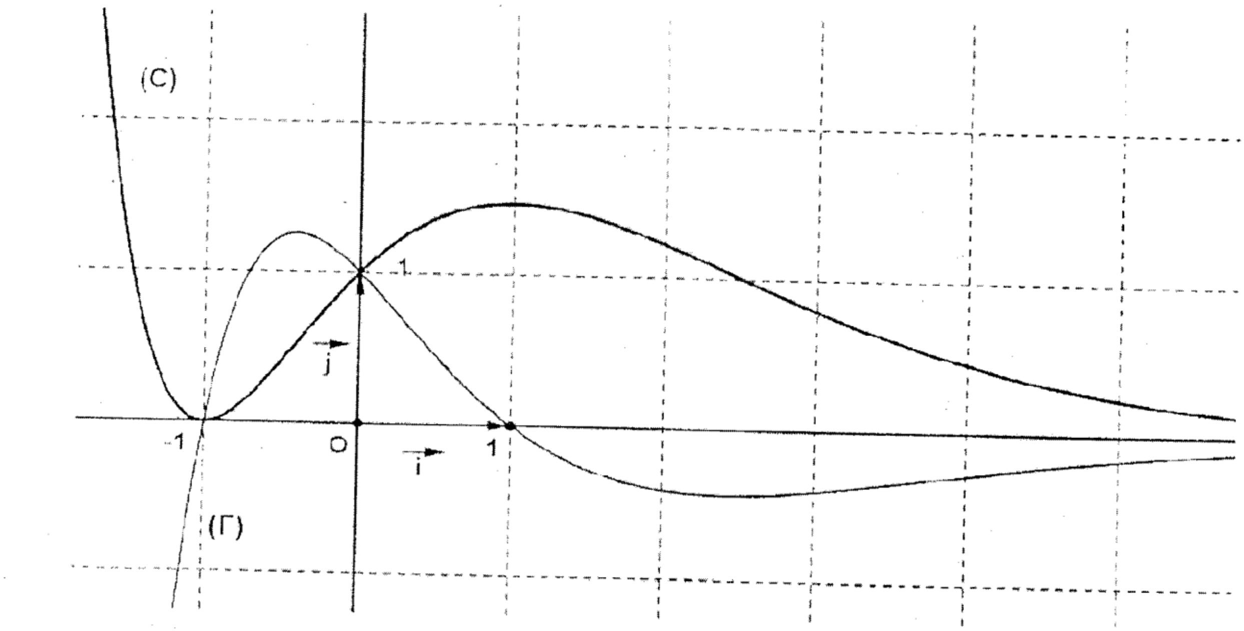
a)Donner une représentation paramétriques de chacune des droites Δ et Δ'

b)En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

c)Calculer la distance de Ω au plan (ABC)

Exercice 4(6 points)

I)On a représenté ci-dessous, dans un repère, les courbes (C) et (Γ) représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f '.



1) Reconnaître la courbe représentative de f et celte de f'.
2) Déterminer $f(0), f^{'}(0), f(-1) et\ f^{'}(-1)$
3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f ', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur lit par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1) a) A Laide dune double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2e - 5$

b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations x=−1 et x=0.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de$[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $1,41 < \alpha < 1,42$.

c) Montrer que $g-^1$ est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}$ (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g).

Exercice 4(5 points)

I)Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que : $g'(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$,puis dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

3. Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

II)Soit $f$la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$

On appelle ($\boldsymbol{C}_f$) la courbe de $f$dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 3 cm).

1)a)Déterminer la limite de $f$en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de $f$en 0 ; on remarquera que : $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$. Que peut-on en déduire ?

2)a) Montrer que pour tout $x$strictement positif : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b)En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de $f$sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3)On rappelle que pour tout $x$de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$

Donner les solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation $f(x)=x$.

4. Tracer ($\boldsymbol{C}_f$) et la droite d'équation $y=x$.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.