Lycée El manara Gabès — Makram amara

A S:11/12 — 4^{eme}Tec

Devoir de synthèse N°2

Exercice 1 :

Indiquer la bonne réponse :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+e^x)}{x}$ =
   a) 0 b) 1 c) $+\infty$
2) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ =
   a) $\frac{e-1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}(1-e)$
3) Les deux plans P : 2x-y+3z+1=0 et Q : 2x+y-z+3=0 sont :
   a) Perpendiculaires b) Parallèles c) sécantes en A(1,8,1)

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(0,1,2), B(2,0,3), C(-1,0,0) et I(1,2,1).

1) a) Vérifier que les points A,B et C ne sont pas alignés.
   b) On désigne par P le plan (ABC).
   Montrer qu'une équation cartésienne de P est : x+y-z+1=0.
2) Soit la sphère (S) dont une équation cartésienne est : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+3=0$.
   a) Montrer que (S) a pour centre le point I et déterminer son rayon.
   b) Montrer que le plan P est tangent à (S) au point A.
   c) Calculer le volume du tétraèdre IABC.
3) Soit H le milieu du segment [IA] et Q le plan passant par H et parallèle à P.
   a) Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle (ξ).
   b) Déterminer le centre et le rayon du cercle (ξ).

Exercice 3 :

A) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x)=e^x+x+1$.
   1) Dresser le tableau de variation de g.
   2) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α et que $-1,28 < \alpha < -1,27$.
   3) En déduire le signe de g(x) pour tout réel x.

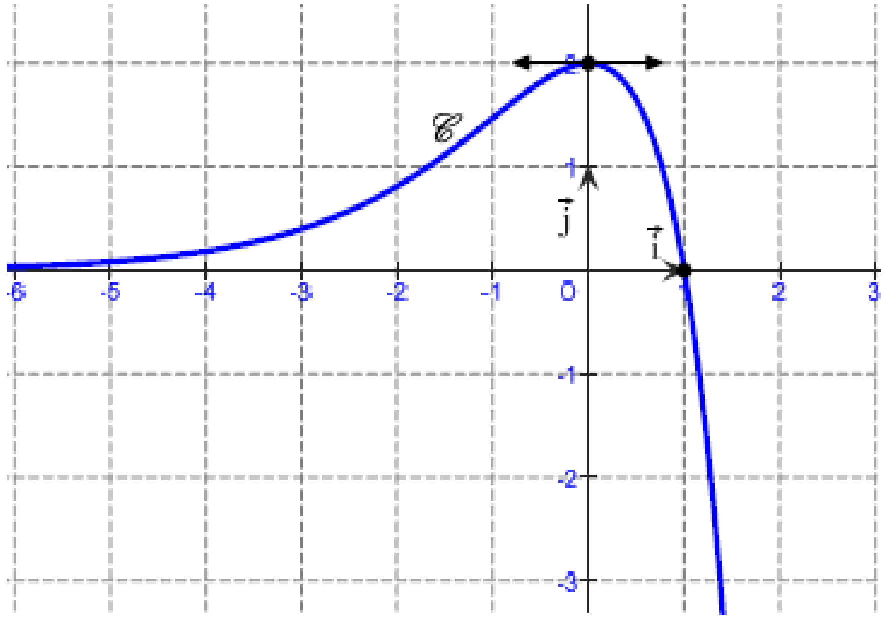
B) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$ .On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   1) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$
   b) Dresser le tableau des variations de f.
   c) Montrer que $f(\alpha)=\alpha+1$
   2) a) Montrer que la droite Δ :y=x est une asymptote oblique à (C_f).
   b) Etudier la position relative de (C_f) et Δ.
   c) Déterminer une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0.
   d) Construire (C_f) , Δ et T.

Exercice 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La courbe (C_f) représente une fonction définie dérivable sur IR.

- ✓ L'axe des abscisses est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- ✓ (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



1) Par lecture graphique :
   a) Déterminer $f(0)$;$f(1)$ et $f'(0)$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
   c) Dresser le tableau de variation de f.
2) On admet que $f(x)=(ax+b)e^{cx}$; a,b et c des réels.
   a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a,b et c.
   b) Déterminer a,b et c.

Exercice 5 :

A) Soit g la fonction définie sur$]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2+\ln(x)-1$
   1) Dresser le tableau de variation de g.
   2) Calculer g(1).Déduire le signe de g(x) pour tout $x\in]0,+\infty[$.

B) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\frac{1}{x}\ln(x)$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$du plan (Unité :2cm).
   1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
      b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
      c) Dresser le tableau de variation de f.
   2) a) Montrer que la droite D :y=x est une asymptote à (C_f).
      b) Préciser les positions relatives de (C_f) et D.
      c) Tracer la droite D et la courbe (C_f).