

Exercice N 1

Pour chacune des questions suivantes, sont proposées trois réponses dont une seule est correcte, on demande de la préciser. Aucune justification n'est demandée.

- Soit la fonction définie sur $[0, e^2]$ par $f(x) = \sqrt{x(2 - \ln(x))}$ a pour dérivée :
a/ $f'(x) = \frac{x(2 - \ln(x))}{2\sqrt{x(2 - \ln(x))}}$ b/ $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{2\sqrt{x(2 - \ln(x))}}$ c/ $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{\sqrt{x(2 - \ln(x))}}$
- Soit A, B et C trois points de l'espace orienté non alignés. L'ensemble des points de l'espace tels que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM} = 0$ est :
a/ le plan (ABC) b/ la droite passant par A et perpendiculaire à (ABC) c/ $\{A\}$

Exercice N 2(5 points)

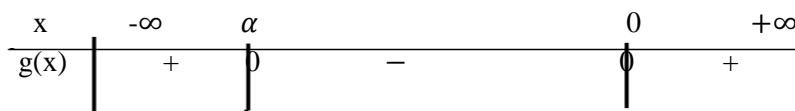
Soit f la fonction définie sur $]0, 2[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$

- Montrer que f est dérivable sur $]0, 2[$ et que $f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$
- Dresser le tableau de variation de f
- a/ Montrer que le point I(1,0) est un centre de symétrie pour la courbe (C_f)
b/ Montrer que le point I(1,0) est un point d'inflexion de la courbe (C_f) puis écrire une équation de la tangente en ce point.
- a/ Montrer que f réalise une bijection de $]0, 2[$ sur \mathbb{R} ; f^{-1} sa fonction réciproque
b/ Calculer $(f^{-1})(x)$ pour tout réel x
- Tracer (C_f) , T, $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère.

Exercice N 3

A/ Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x - x - 2$

- Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis celle en $+\infty$
- Dresser le tableau de variation de g
- Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions 0 et α et que $\alpha \in]-1,6, -1,5[$
- Montrer que le signe de g est le suivant :



B/ La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

- Vérifier que : $f(x) = e^{2x} \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$ puis en déduire la limite de f en $+\infty$
- Déterminer la limite de f en $-\infty$
- Montrer que $f'(x) = e^x (g(x))$ puis dresser le tableau de variation de f

4. Montrer que $\frac{f(x)}{x} = e^x \left(\frac{e^x}{x} - \left(\frac{x+1}{x} \right) \right)$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ et interpréter graphiquement le résultat
5. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ puis tracer (C_f)
6. Soit la fonction h définie par $h(x) = xe^x$ calculer $h'(x)$, déterminer alors une primitive F de f telle que $F(0) = 3$

Exercice N 4

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points : $A(0,0,2)$; $B(1,0,0)$; $C(0,-1,0)$ et $I(1,1,1)$

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan. On notera $P = (ABC)$
 b) $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$. En déduire que I n'appartient pas au plan P
 c) Calculer le volume du tétraèdre ABCI
 d) Déterminer alors la distance du point I au plan P
2. On désigne par S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$
 - a) Montrer que S est une sphère, préciser son centre ω et son rayon
 - b) Déterminer une équation cartésienne de P
 - c) Etudier la position relative de S et P et caractériser leur intersection.
3. Pour tout m on associe le plan $P_m : 2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$
 - a) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à S
 - b) Soit H le point de contact de P_m et S lorsqu'ils sont tangents; déterminer les coordonnées de H