LYCÉE ASSAD IBN ALFOURAT OUED ELLIL

DEVOIR DE SYNTHESE n° 2

CLASSE : 4 TECH

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES **DUREE :** 3 h **COEFFICIENT :** 3

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux.

1) La primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$, qui prend la valeur 0 en 1, de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est la fonction $F : x \mapsto \ln x$

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x+1+\dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé. La droite d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

3) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 2$ est une sphère.

4) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$ est un plan.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A (0 ; 6 ; 0), B (0 ; 0 ; 8) et C (4 ; 0 ; 8).

1) Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).

2) **a)** Démontrer que les triangles ABC et OAC sont rectangle respectivement en B et on O.

b) la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OAB).

3) Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre OABC.

4) Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4 : (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$

1) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à (AB) est $x - y + 2z + 3 = 0$

2) Soit P_m les plans d'équation cartésienne $x + y + m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

a) Montrer que (AB) est parallèle à P_m.

b) Pour quelle valeur de m , la droite (AB) est incluse dans P_m ?

3) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.

b) Etudier suivant les valeurs de m, les positions relatives du plan P_m et la sphère S.

c) Montrer que P_1 coupe S suivant un cercle dont on précisera les coordonnées du centre H et le rayon r.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

Soit C la courbe représentative de f et soit H celle de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{x}$.

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.En déduire que C a deux asymptotes que l'on déterminera.

2) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{-4\ln x}{x^3}$ et en déduire le tableau de variations de f.

3) Pour tout x de $]0,+\infty[$ on pose $g(x)=1-x+2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de la fonction g.

b) Calculer g(1). En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution dans $]0;2[$.

c) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $]2;4[$

Vérifier que $3,5<\alpha<3,6$

4) a) Montrer que $f(x)-\frac{1}{x}=\frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que C et H se coupent en deux points.

b) Montrer que, pour tout réel $x\geq 4$, $0<f(x)<\frac{1}{x}$

5) Tracer C et H.

CORRECTION :

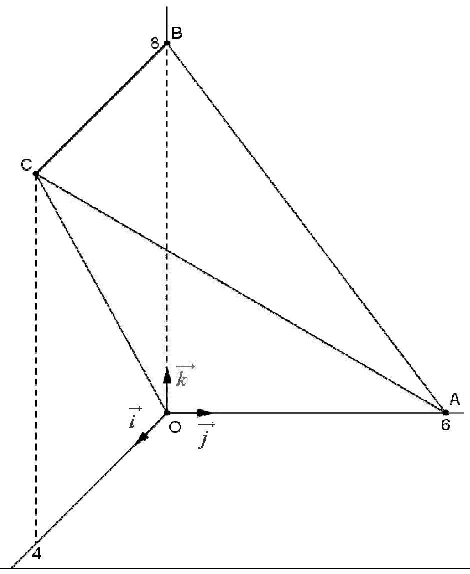
Exercice 1 : (3 points)

1) Vrai **2) Vrai,** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$. **3) Vrai**. Soit G le barycentre des points pondérés (A,4) et (B,-1) $\left\Vert 4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\Vert=2 \Leftrightarrow MG=\frac{2}{3}$ **4) Faux** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=0$ pour tout point M de l'espace.	0,75 x 4

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A (0 ; 6 ; 0), B (0 ; 0 ; 8) et C (4 ; 0 ; 8).

1)  	0,5 x 3
2) a) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\times4+6\times0+(-8)\times0=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$ ainsi le triangle ABC est rectangle en B. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0\times4+6\times0+0\times8=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ ainsi le triangle OAC est rectangle en O.	0,5 x 2
b) Le plan $(OAB)=P\left(O,\vec{j},\vec{k}\right)$ comme la droite $(O,\vec{i})$ est perpendiculaire au plan $P\left(O,\vec{j},\vec{k}\right)$ et comme la droite (BC) est parallèle à la droite $(O,\vec{i})$. Donc $(BC)\perp(OAB)$	1
3) $\mathscr{V}_{OABC}=\frac{1}{3}\mathscr{A}_{OAB}\times BC=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}OA\times OB\right)\times BC=\frac{1}{6}\times6\times8\times4=32\ cm^3$ Autre méthode : $\mathscr{V}_{OABC}=\frac{1}{6}\left\vert\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right\vert$	1

4) Les triangles BAC et OAC sont rectangles respectivement en B et O donc il suffit de prendre la sphère de diamètre [AC] qui passe par les points O et B	0,5

Exercice 3 : (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$

1) Le plan Q est perpendiculaire à (AB) donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est vecteur normal à Q. Donc $Q: x-y+2z+d=0$.Q passe par $A(1,2,-1)$ donc $1-2-2+d=0 \Leftrightarrow -3+d=0 \Leftrightarrow d=3$ D'où $Q: x-y+2z+3=0$	1
2) Soit P_m les plans d'équation cartésienne $x+y+m-3=0$ où m est un paramètre réel. **a)** $\overrightarrow{N_m}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: Le vecteur normal à P_m $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{N_m}=1\times1+(-1)\times1+2\times0=1-1=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{N}$ d'où (AB) est parallèle à P_m.	1
b) Comme (AB) est parallèle à P_m donc (AB) est incluse dans P_m si $A\in P_m$ donc $1+2+m-3=0 \Leftrightarrow m=0$	0,5
3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que : $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$ $M(x,y,z)\in \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+z^2-2-2=0$ $\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=4$ Donc S est la sphère de centre $I(-1,1,0)$ et de rayon R = 2.	1,5
b) $d(I,P_m)=\dfrac{\lvert -1+1+m-3\rvert}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{\lvert m-3\rvert}{\sqrt{2}}$ $d(I,P_m)-R=\dfrac{\lvert m-3\rvert-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(m-3)^2-8}{\sqrt{2}\left(\lvert m-3\rvert+2\sqrt{2}\right)}$ $(m-3)^2-8=0 \Leftrightarrow m=3+2\sqrt{2}$ ou $m=3-2\sqrt{2}$ <table><tr><td>m</td><td>$-\infty$</td><td>$3-2\sqrt{2}$</td><td>$3+2\sqrt{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$(m-3)^2-8$</td><td>+</td><td>0 −</td><td>0 +</td><td></td></tr><tr><td>Position de P_m et S</td><td>$P_m\cap S=\varnothing$</td><td>$P_m\cap S=$ un cercle</td><td>$P_m\cap S=\varnothing$</td><td></td></tr></table>Si $m=3+2\sqrt{2}$ ou $m=3-2\sqrt{2}$ alors P_m est tangent à S .	1
c) $1\in\left]3-2\sqrt{2}\ ,\ 3+2\sqrt{2}\right[$ donc le plan P_1 coupe S suivant un cercle de rayon $r=\sqrt{R^2-\left(d(I,P_1)\right)^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$ et de centre H le projeté orthogonal de I sur P_1. $\begin{cases}H(x,y,z)\in P_1\\ \overrightarrow{IH}=\alpha\ \overrightarrow{N_m}\end{cases}\alpha\in IR \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-2=0\\x=-1+\alpha\\y=1+\alpha\\z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1+\alpha+1+\alpha-2=0\\x=-1+\alpha\\y=1+\alpha\\z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\x=0\\y=2\\z=0\end{cases}$ D'où $H(0,2,0)$	1

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

Soit f la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

Soit C la courbe représentative de f et soit H celle de la fonction h définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}(1+2\ln x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote à C.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2\ln x}{x^2}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

1

2) f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x^2-2x(1+2\ln x)}{x^4}=\frac{2x-2x-4x\ln x}{x^4}=\frac{-4x\ln x}{x^4}=\frac{-4\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -4\ln x=0\Leftrightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

1

3) Pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$ on pose $g(x)=1-x+2\ln x$.

a) g est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$, $g'(x)=-1+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2-x}{x}$

$g'(x)=0-\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=2$

x	0		2		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)	$-\infty$	↗	$-1+2\ln 2$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 1-x+2\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1}{x}-1+2\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$

1

b) $g(1)=1-1+2\ln 1=0$, g est continue est strictement croissante sur $\left]0;2\right[$ donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution dans $\left]0;2\right[$.

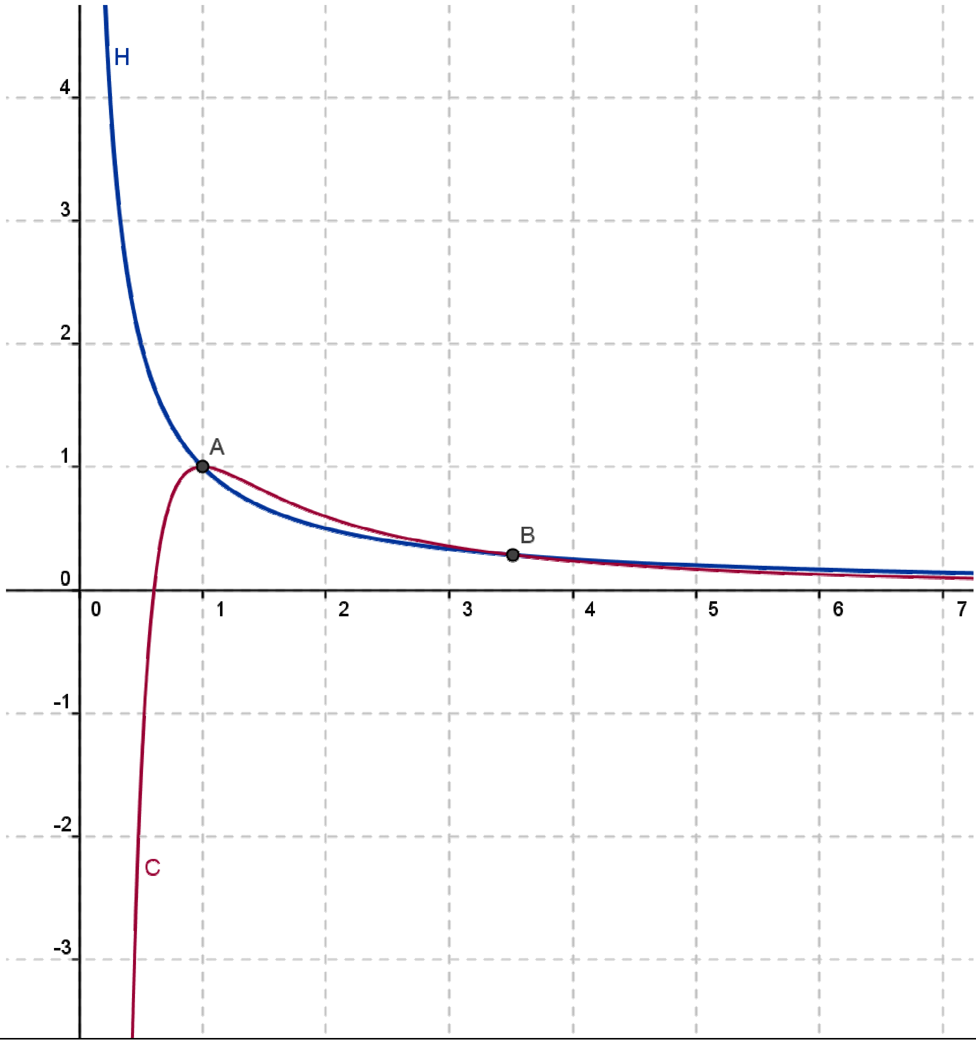
0,5

c) g est continue sur $\left]2;4\right[$ et $g(4)=-3+4\ln 2\approx-0{,}22$; $g(2)=-1+2\ln 2\approx0{,}39$

$g(4)\times g(2)<0$ et comme g est strictement décroissante sur $\left]2;4\right[$ donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]2;4\right[$.

$g(3,5)\approx0,2$, $g(3,6)\approx-0,04$ et $g(3,5)\times g(3,6)<0$ donc $3,5<\alpha<3,6$

0,5

4) a) $f(x)-\frac{1}{x}=\frac{1+2\ln x}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1+2\ln x-x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$ Les abscisses des points d'intersection de C et H sont les solutions de l'équation $f(x)-\frac{1}{x}=0$ $f(x)-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\alpha$ Donc C et H se coupent en deux points.	**1**
b) pour tout réel $x \geq 4$, $f(x)>0$ et $g(x)<0$ donc $\frac{g(x)}{x^2}<0 \Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{x}<0$ d'où pour tout réel $x \geq 4$, $0<f(x)<\frac{1}{x}$	**0,5**
5) 	**0,5**