Lycée Ali B.Bembla	**Devoir de synthèse n°2** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Technique2*
Date 06/03/2013	*Prof :Mosrati chawki*	*Durée* 3 heures

Exercice : (5 pts)

L'espace est muni d'un repère o.n.d. $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points A(3 ,2 ,4), B(0 ,3 ,5) et C(3, 1, 0).

1) Montrer que ABC est un triangle et calculer son aire.
2) Soit E (1 , m + 2 , -1) où m est un réel.
   a- Calculer, en fonction de m, $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}$.
   b- En déduire la valeur de m pour que E soit un point du plan (ABC).
3) Dans la suite on prend m = 2.
   Soit H le projeté orthogonale du point E sur le plan (ABC).
   a- Calculer le volume du tétraèdre EABC.
   b- En déduire EH.
4) a- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
   b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH).
   c- Déterminer les coordonnées du point H.
5) Soit S la sphère dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 10z + 15 = 0$.
   a- Déterminer les coordonnés du centre I et le rayon R de S.
   b- Vérifier que la droite (AI) est perpendiculaire au plan (ABC).
   c- Déterminer la position relative du plan (ABC) et la sphère S.

Exercice : (8 pts)

I/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$.

1) Dresser le tableau de variation de g sur IR.
2) En déduire que pour tout x ∈ IR, g(x) > 0.

II/ Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$ et on désigne par C sa représentation graphique dans un repère $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que pour tout x ∈ IR, f'(x) =g(x) .
   b) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f sur IR.

2) a) Montrer que la droite Δ : y = x - 1 est une asymptote oblique à la courbe C .

b) Préciser la position de Δ par rapport à C .

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Que peut-on en conclure ?

3) a) Montrer que réalise une bijection de IR sur IR. On note f^{-1}sa fonction réciproque et C sa représentation graphique dans le même repère $(o;\vec{i};\vec{j})$.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans IR une solution unique α .Vérifier que $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

c) Justifier que f^{-1} est dérivable sur IR et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{e}\right)$.

4) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C parallèle à la droite Δ .

5) Représenter dans le même repère, les droites T et Δ et les courbes C et C .

6) Soit H la fonction définie sur IR par : $H(x) = (ax - b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.

a) Déterminer les réels a et b pour que H soit une primitive de la fonction $h(x) = xe^{-x}$ sur IR.

b) En déduire la primitive F de f sur IR qui s'annule en 0.

Exercice (7 pts)

A/ Soit la fonction g définie sur]0 ; +∞ [par $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$.

1/ Etudier le sens de variation de g.

2/ En déduire que pour tout x de]0 ; +∞ [, g(x) > 0.

B/ On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞ [par $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$.

On note par C la courbe représentative de f dans un repère o.n. $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1/ Calculer f(1) et f(e).

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

4/ a- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

b- Déduire le sens de variation de f.

5/ a- Montrer que l'équation f(x) = 2 admet une solution unique α et que α ∈]3 ; 4[.

b- Donner une valeur approchée à 10^{-1}prés de α.

6/ a- Montrer que pour tout x ∈]0 ; + ∞[, $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}$.

b- Montrer que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à C .

c- Etudier la position de C par rapport à Δ.

7/ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 1.

8/ Tracer C ,(T) et les asymptotes à la courbe dans le repère $(o;\vec{i};\vec{j})$.