Lycée Secondaire El Ksour	DEVOIR DE SYNTHESE N°2	Prof Bouzouraa Chaouki
Année Scolaire 2013-2014	Mathématiques	4 Techniques DUREE :3H

Exercice n°1(5pts)

1) Etudier les variations de la fonction f définie sur IR par f(x) = $\frac{1+x^2}{3+x^2}$

2) Soit h(x) = $x^3 - x^2 + 3x - 1$

a) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet dans IR une unique solution x_0 **.**

b) Vérifier que $1/3 < x_0 < 1$**.**

c) Etudier le signe de h(x).

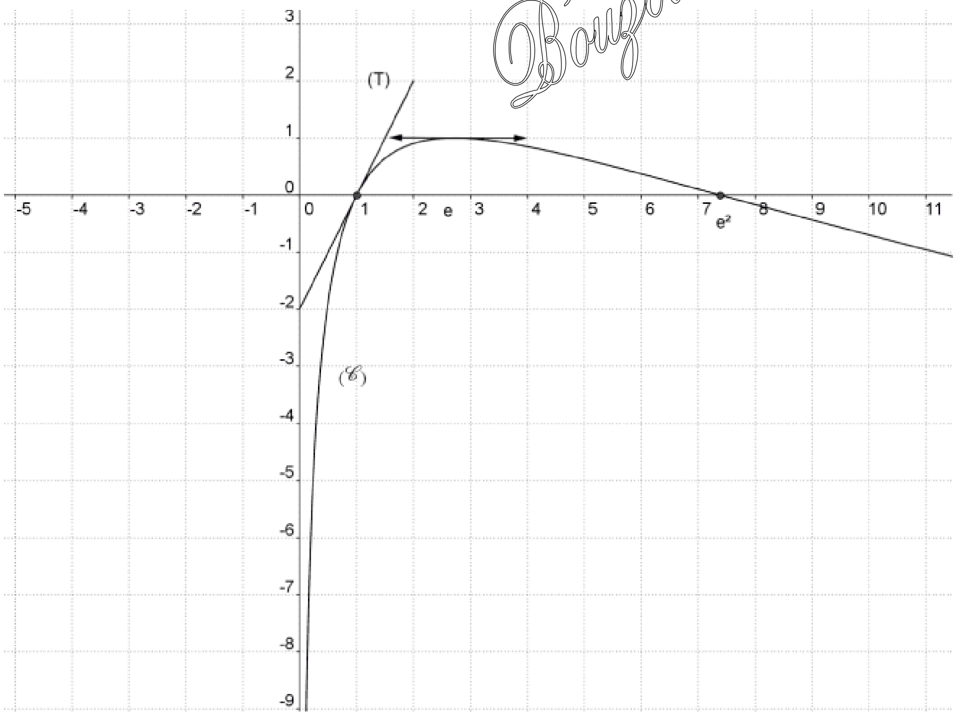
3) On considère la suite U définie sur IN par : $U_0 = 0$ **et** $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN ; $0 < U_n < x_0$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) Montrer que la suite (U_n) **convergente vers** x_0**.**

Exercice n°2(4pts)



Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par f(x) = (a + b ln(x))ln(x) , ou a et b sont des réels . La figure ci – dessus est la représentation graphique de la fonction f , relativement à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.$(\mathcal{C})$ admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique dont la direction est cele de la droite $(O,\vec{i})$.

-1- Par lecture graphique , déterminer .

a) f '(1) ; f '(e) ; f (e²) et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau des variations de f .

-2- a) Montrer que f '(x) = $\frac{a+2b\ln(x)}{x}$

b) Déterminer a et b

-3- Soit la fonction g définie par g(x) = -x(2-ln(x))² . Montrer que g est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

-4 – En déduire $\int_1^{e^2} f(x)dx$

Exercice n°3(5pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les points A, B et C ont pour coordonnées A(3; −2; 2), B(6; 1; 5), C(6; −2; −1).

Partie A

1) Démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + y + z - 3 = 0$$

Prouvez que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

3) Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminez une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4) Déterminez un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées (0; 4; −1). Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraêdre ABCD.
3) Prouvez que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculez l'aire du triangle BDC.
   b) Déduisez-en la distance du point A au plan (BDC).

Exercice n°4(6pts)

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$
   b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) a) On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
   Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A.
   b) Construire T, puis $\mathscr{C}_f$.
3) M est un point de $\mathscr{C}_f$. **M(u ;f(u))**
   Démontrer que la tangente T_u à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si, et seulement si :

$$u^3 - 1 + 2\ln u = 0 \quad [1]$$

4) À partir de l'équation [1], démontrer que A est le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.