Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification.

1) L'ensemble des solutions de l'équation : lnx = -3est

a) L'ensemble vide b) $\{\sqrt[3]{e}\}$ c) $\{\frac{1}{e^3}\}$

2) $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ est égal à:

a) $\ln(2)$ b) $-\ln(2)$ c) $\frac{3}{8}$

3) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ égal à

a) $-\frac{1}{2}$ b) ln2 c) $\frac{1}{2}$

Exercice n°2(6 points)

Soit la fonction f définie sur [0, +∞ [par $\begin{cases} f(x) = x + x(lnx)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 4cm).

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Montrer que f est dérivable sur]0, +∞[et que $f'(x) = (1 + lnx)^2$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

2)a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 .

b) Etudier la position relative de (C) et T.

c) Construire T et (C).

3) Soit la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ définie par $I_n = \int_1^e x(Lnx)^n dx$.

a) A l'aide dune intégration par partie Calculer I_1.

b) Montrer que pour tout n≥1 on a : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations x=1, x=e et y=0. Calculer A en cm^2.

Exercice n°3 : (6points)

A) Soit la suite (I_n) définie sur IN* par : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

1) a)Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante.

b) Montrer que $I_1 = 1$

On admet que pour tout n $\in$ IN* on a : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

Déterminer alors la valeur de I_2.

B) La courbe dans l'annexe est celle de la fonction f définie sur]0, + ∞[par :
$f(x) = 1 - (\ln x)^2$

1) Graphiquement, dresser le tableau de variation de f.
2) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.
3) Soit V le volume de le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc courbe de f associé à [1 ; e] autour de l'axe des abscisses.
a) Montrer que: $V = \pi(I_4 - 2I_2 + e - 1)$
b) Calculer V.
4) Montrer qur f réalise une bijection de [1,+∞[sur un intervalle J à déterminer.
b) Vérifier que $f^{-1}(x) = e^{\sqrt{1-x}}$
c) Tracer sur l'annexe la courbe de $f^{-1.}$
d) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f^{-1} , les droites d'équations x = 0, y=1 et y = e.

Exercice n°4 : (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.
Soit les points A(1,2,-1) ;B(1,0,1) ;C(2,1,-1) et H(1,1,0).

1)a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduire que A,B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer l'aire du triangle ABC

2) On donne les points D (2,2,1) et D'(0,0,-1).

a) Vérifier que H est le milieu de [AB] et [DD'].

b) Monter que (HD) est perpendiculaire au plan (ABC)

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
d) Déterminer une équation du plan médiateur Q du segment [AB]

3) Soit S l'ensemble des points d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 -2x -2z -3 = 0$.

a) Monter que S est une sphère de centre B et passant par D et D'.

b) Déduire que S et Q sont sécants suivant un cercle de centre H dont on précisera son rayon.

4) Soit S' la sphère de centre A et passant par D.

a) Vérifier que S' passe par D'.

b) Déduire l'ensemble d'intersection de S et S'.