LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
4^EME^ TECHNIQUE «3»

2013/2014
DEVOIR DE SYNTHESE N2
MATHEMATIQUES
3 heures

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : (2 points)

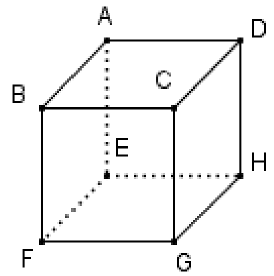
Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

1) L'ensemble de solutions dans $]0,+\infty[$ de l'inéquation : $2-\ln(x+1)\leq 1$ est :

a) $[e-1,+\infty[$ b) $]-1,e-1]$ c) $[0,e-1]$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-xe^x)$ est égale à :

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0



3) Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

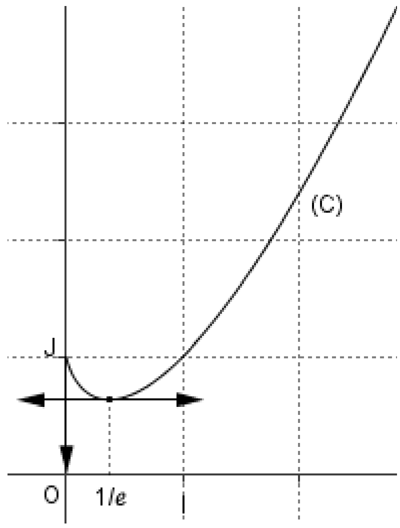
i) Le vecteur $\overrightarrow{BF}\wedge\overrightarrow{BG}$ est égal à :

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\sqrt{2}.\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{BA}$

ii) La sphère S de diamètre [BG] et la droite (CD) sont :

a) disjoints b) tangents c) sécants

EXERCICE 2 : (5 points)



A/ Dans le graphique ci-contre on donne selon un repère orthonormé (O,I,J) la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=1+(ax+b)\ln x & si\ x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ (avec a et b sont deux réels).

• Au voisinage de $(+\infty)$, (C) admet une branche infinie parabolique de direction celle de (O,J).

• (C) admet au point $A(\frac{1}{e},\frac{e-1}{e})$ l'unique tangente parallèle à (O,I).

• (C) admet au point J l'unique demi- tangente verticale.

1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f

3) a) Déterminer $f(\frac{1}{e})$ et $f'(\frac{1}{e})$

b) En déduire que a=1 et b=0

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e},+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

(On note f^{-1} sa fonction réciproque)

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} sur l'intervalle J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

Voir suite au verso

EXERCICE 3 : (7 points)

A/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(L'unité graphique étant 1cm)

1) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet dans IR exactement deux solutions 0 et α.

Vérifier que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$

b) En déduire que $\begin{cases} g(x) \leq 0 \ \ si \ \ x \in [\alpha, 0] \\ g(x) > 0 \ \ si \ \ x \notin [\alpha, 0] \end{cases}$

3) a) Montrer que la droite D : $y = -x - 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$.

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à D.

c) Montrer que la courbe(C) admet au voisinage de $(+\infty)$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{\jmath})$.

4) Tracer (C) et D.

B/ On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O', \vec{u}, \vec{v})$.

(L'unité graphique étant 2cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x . g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que la courbe (Γ) admet au voisinage de $(+\infty)$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{\jmath})$.

3) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$

4) Tracer la courbe (Γ). (On prendra $f(\alpha) \approx 0{,}2$)

EXERCICE 4 : (6 points)

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les points A$(-2,2,1)$, B$(-2,1,1)$ et C$(0,-1,3)$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{\imath} + 2\vec{k}$

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (qu'on notera P).

2) Montrer alors qu'une équation du plan P est $x - z + 3 = 0$

3) a) Montrer que les points A, B, C et O ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume V du tétraèdre OABC, puis calculer sa hauteur issue de O.

4) Soit $\mathcal{C}$ le cercle du plan P de centre A et de rayon 1 et S la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ qui coupe le plan P suivant le cercle $\mathcal{C}$.

a) Montrer que la sphère S est de rayon $R = \sqrt{3}$.

b) Ecrire alors une équation cartésienne de S.

5) Soit le plan Q d'équation : $x + z + \sqrt{6} - 3 = 0$

a) Montrer que le plan Q est tangent à la sphère S.

b) Déterminer les coordonnées de leur point de contact H.

Bon travail