Exercice N° 01(4 pts):

Cocher la réponse juste :

1/ Soit a un réel non nul et f une fonction paire à valeurs strictement positives sur $[-a,a]$ alors $\int_{-c}^{c} f(x)dx$; $c \in [-a,a]$ est:

① Nulle ☐ ; ② Strictement positive ☐

③ Strictement négative ☐ ; ④ Egale à: $2\int_{0}^{c} f(x)dx$ ☐

2/ Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ sur $[0,+\infty[$ alors la fonction de répartition F de X est :

① $\begin{cases} F(x)=0 & \text{si } x \le 0 \\ F(x)=e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ ☐ ; ② $\begin{cases} F(x)=0 & \text{si } x < 0 \\ F(x)=e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ ☐

③ $\begin{cases} F(x)=0 & \text{si } x < 0 \\ F(x)=1-e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ ☐

3/ La fonction $H(x)=\int_{x}^{2x} t\ln(t)dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est :

① $x\ln(2x)$ ☐ ; ② $x\ln(16x^3)$ ☐ ; ③ $2x\ln(2x)-x\ln(x)$ ☐

Exercice N° 02(5 pts):

On considère trois urnes U_1 ; U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.

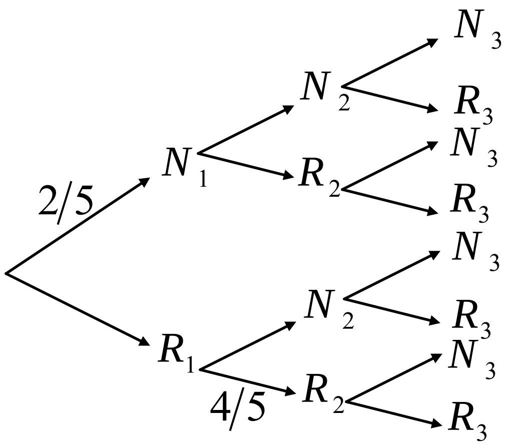
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.

L'urne U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les-mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.

Pour $i \in \{1;2;3\}$, on désigne par N_i (resp R_i) l'évènement : " on tire une boule noire de l'urne U_i " (resp " on tire une boule rouge de l'urne U_i ")

1/ Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2/ a) Calculer $P\left(N_1 \cap N_2 \cap N_3\right)$et $P\left(N_1 \cap R_2 \cap N_3\right)$.

b) En déduire $P\left(N_1 \cap N_3\right)$.

c) Calculer de façon analogue $P\left(R_1 \cap N_3\right)$.

d) En déduire $P\left(N_3\right)$

3/ Les évènements N_1 et N_3 sont – ils indépendants ?

4/ Sachant que la boule tirée de U_3 est noire , quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge.

Exercice N° 03 (6 pts) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} - e^{-x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x} + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

et $\left(\xi_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

2/ Montrer que $\left(\xi_f\right)$ admet une asymptote (Δ)au voisinage de $-\infty$dont on déterminera son équation.

3/ Etudier la continuité de f en 0.

4/ Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe représentative $\left(\xi_f\right)$ dans$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5/ Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $(\xi_f),(\Delta)$ et les droites d'équations $x=\ln(4)$ et $x=\alpha\,;\alpha>\ln(4)$.

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$.

c) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{A}(\alpha)$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

Exercice N° 04 (5 pts) :

Soit $U_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \;\; ; \;\; n\in\mathbb{N}$

1/a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\le U_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

2/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $U_n=n\,U_{n-1}-\dfrac{1}{e}$.

3/a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $U_n=\dfrac{n!}{e}\left[e-\left(\sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{1}{p!}\right)\right]$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{1}{p!}=e$

Bon Travail .... ✍