Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef
Habib Gammar
2010-2011

Devoir De Synthèse N°3

Mathématiques

$4^{\text{ème}}$ T
3 Heures

Exercice 1 (3 points)

- *Pour Chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1) Le réel $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ est égal à :

a) $-\frac{1}{12}$ **b)** $\ln(\frac{3}{4})$ **c)** $\frac{1}{12}$

2) Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+5\right)$

Alors le nombre dérivé de la fonction f en 1 est :

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{\ln(6)}$ **c)** $\frac{\ln(6)}{2}$

3) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,2,3)$, $B(1,1,1)$ et $C(3,2,1)$.

Le plan (ABC) est parallèle au plan P d'équation :

a) $x+y-z=0$ **b)** $x+y+z-3=0$ **c)** $x-2y+z+5=0$

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \dfrac{6+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{2+n}$

Cette suite :

a) a pour limite 3 **b)** a pour limite 0 **c)** n'a pas de limite

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,-1,4)$, $B(7,-1,-2)$ et $C(1,5,-2)$.

1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

c) Montrer que le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

d) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+y+z-4=0$$

2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\Delta:\begin{cases} x=-2\alpha \\ y=-2\alpha-2 \\ z=-2\alpha-3 \end{cases} ;\ \alpha\in\mathbb{R}$$

a) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

b) Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite Δ et du plan (ABC) sont $(3,1,0)$

c) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.

3) Soit S la sphère de centre $I(1,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S

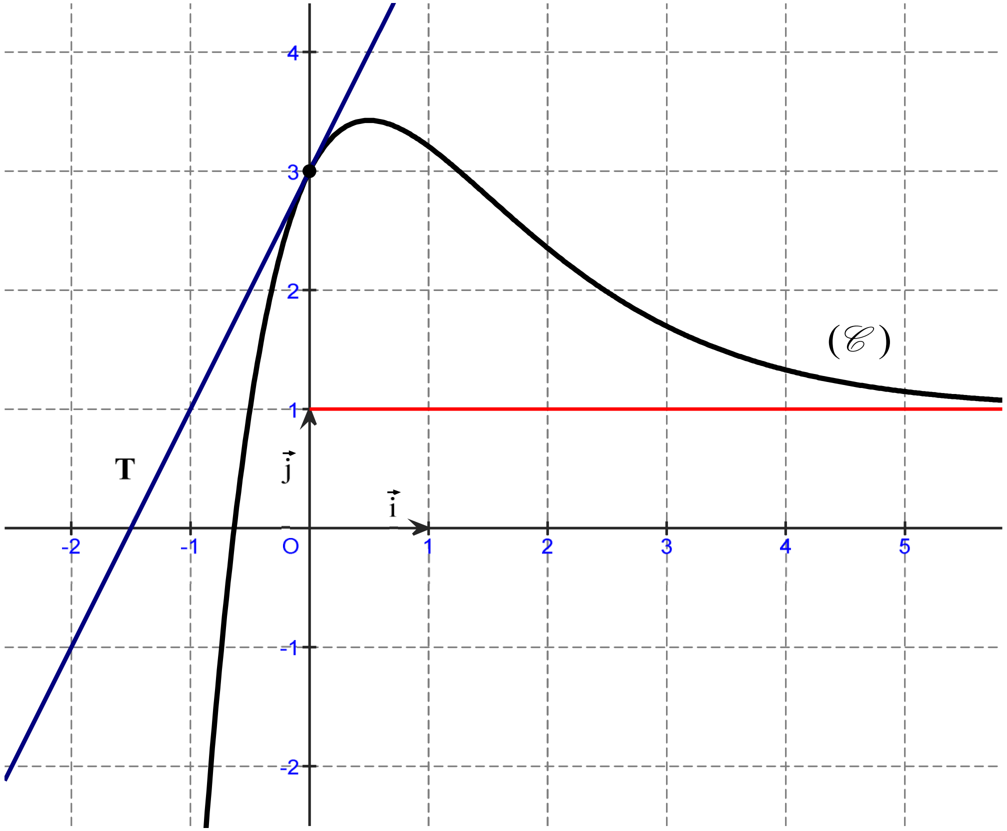
Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- La droite T est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
- La courbe $(\mathscr{C})$ admet :

  Une asymptote d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.

  Une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.



I) En utilisant le graphique :

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) Déterminer $f(0)$ *et* $f'(0)$

3) Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

II) On admet que $f(x)=1+\dfrac{ax+b}{e^x}$; $a,b\in\mathbb{R}$

1) a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de *a*, de *b* et de *x*.

b) Démontrer que l'on a, pour tout réel *x* : $f(x)=1+\dfrac{4x+2}{e^x}$

2) a) Vérifier que la fonction *F* définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x)=x+\dfrac{-4x-6}{e^x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Devoir De Synthèse N°3

Mathématiques

Exercice 4 (5 points)

I)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - x\ln x$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = -\ln x$

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

II)

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $U_n = \dfrac{e^n}{n^n}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3

2) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $V_n = \ln(U_n)$

a) Montrer que $V_n = f(n)$

b) Déterminer le sens de variation de la suite (V_n)

c) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

3) Montrer que la suite (U_n) est bornée.

4) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5 (3 points)

Soit f la fonction définie $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{e}{2}x$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$

2) a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} x\, e^{2x}\,dx$

b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au-dessus de la courbe $(\mathscr{C})$.