

*Direction régionale de l'éducation de Monastir  
Lycée Ali Bourguiba Bembla*

*Devoir de synthèse n°3*

➤ *Mosrati chawki*

*Proposé par :*

➤ *Aquech mabrouk*

*16 Mai 2011*

*Matière : Mathématiques*

*Niveau : 4<sup>ème</sup> Année*

*Section : Sciences techniques*

*Durée de l'épreuve : - 3 heures*

*- Coefficient 3*

*Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4*

*La page n°4 est à rendre avec les copies*

*L'usage d'une calculatrice est autorisé*

*Les élèves doivent traiter les 4 exercices .  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des  
raisonnements entreront pour une part importante dans  
l'appréciation des copies*



**Exercice : 1**(3 pts)

**I/ Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.**

**L'élève indiquera sur sa copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**

1)  $\int_{-1}^1 te^{\cos t} dt$  est :

- a) Strictement positive                      b) Strictement négative                      c) Nulle.

2) La fonction :  $x \mapsto \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$  est définie sur :

- a)  $[1, +\infty[$                                       b)  $]-1, +\infty[$                                       c)  $\mathbb{R}$

3) La dérivée de la fonction  $x \mapsto 3^x$  est la fonction

- a)  $x \mapsto x3^{x-1}$                               b)  $x \mapsto 3^x \ln 3$                               c)  $x \mapsto e^{x \ln 3}$

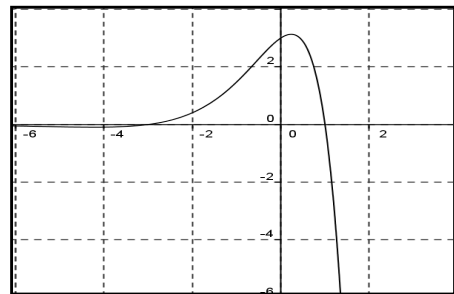
4) La valeur moyenne sur  $[0, 1]$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$  est:

- a) 1                                              b)  $\frac{e-1}{2}$                                               c)  $e-1$

5) La courbe ci-contre est celle d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et admet voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $(y, y')$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

- a) 0                                              b)  $+\infty$                                               c)  $-\infty$



au

6) On considère la sphère  $S$  de centre  $\Omega(1,-2,1)$  et de rayon  $\frac{2}{3}\sqrt{5}$  et la

$$\text{droite } D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2\alpha \\ z = -2\alpha + 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ alors l'intersection de } D \text{ et } S \text{ est :}$$

- a) un point                                      b) deux points                                      c)  $\emptyset$

**Exercice : 2**(5 pts)

On considère dans l'espace muni du repère orthonormé direct  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On

considère les points  $A(2,0,3)$ ;  $B(3,2,0)$ ,  $C(2,3,0)$  et  $D(2,2,3)$

1) a) Calculer le produit vectoriel:  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ ; en déduire que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

B) Montrer qu'une équation du plan  $(ABC)$  est :  $x + y + z - 5 = 0$ .

C) Vérifier que  $ABCD$  est un tétraèdre puis calculer son volume  $V$ .

2) Soit  $S$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que :  $X^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0$ .

Montrer que  $S$  est une sphère dont on précisera le centre  $I$  et le rayon  $R$ .

3) Montrer que le tétraèdre  $ABCD$  est inscrit dans la sphère  $S$ .

4) Soit  $C$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ ; Déterminer le centre  $fi$  et le rayon  $r$  du cercle  $C$ .

**Exercice :3 ( 4 pts)**

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on considère l'intégrale :  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ .

1/ a- Démontrer que pour tout  $x$  de  $]1; e[$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$ .

b- En déduire que la suite  $(I_n)$  est décroissante.

2/ a- Calculer  $I_1$ .

b- Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $I_{n+1} = e^{-(n+1)} I_n$ .

c- En déduire  $I_2$ .

3/ a- Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $I_n \geq 0$ .

b- Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $(n+1)I_n \leq e$ .

c- En déduire la limite de  $I_n$ .

**Exercice :4 ( 8 pts )**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ; on prendra 2cm comme unité sur les deux axes .

l/ On considère la fonction  $f$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$

On désigne par  $C$  sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $0$ .

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln x + x - 3$ .

a- Étudier les variations de  $g$ .

b- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha \in ]0; +\infty[$  et que  $2.20 < \alpha < 2.21$ .

c- Étudier le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$

3. a- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

b- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c- Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ .

d- En déduire que  $-0.65 < f(\alpha) < -0.66$ .

4. a- Étudier le signe de  $f(x)$ .

b- Tracer  $\mathcal{C}$ .

5. Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur  $]0; \alpha]$ .

a- Montrer que  $h$  est une bijection de  $]0; \alpha]$  dans un intervalle que l'on déterminera.

b- Tracer la courbe de  $h$  dans le même repère.

6. a- Montrer que  $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$ .

b- Montrer que  $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = 2$ .

c- Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine limité par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e^2$ .

Prof: Mosrati+Aquech

Sujet proposé  
(2011)

DEVOIR DE SYNTHESE N:3

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

EPREUVE :  
MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures

COEFFICIENT : 3

Feuille à rendre

Nom : .....

Prénom : .....

Classe : 4 Technique : ....

Question :1	Question :2	Question :3	Question :4	Question :5	Question :6

