Lycée Ibn khaldoun	**DEVOIR DE SYNTHESE N°3**	Classe : 4ème Sc techniques 1
Prof : Zribi Ramzi	Date : lundi 16 mai 2011	Durée : 3 heures

EXERCICE N° 1 (3pts)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à donner la réponse exacte sans justification

N°	questions	réponses		
		a	b	c
1)	Soit f la fonction définie sur IR* par $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$	est paire	est impaire	ni paire ni impaire
2)	A et B deux points distincts de l'espace ξ l'ensemble $E=\{M\in\xi \text{ tels que } \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\}$	est une droite	un plan	un cercle
3)	$\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=$	$-\infty$	0	1
4)	soit G la fonction définie sur IR par $G(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ L'équation de la tangente à C_G au point d'abscisse 1 est	$y=\frac{1}{2}(x-1)$	$y=x-1$	$y=x$

EXERCICE N° 2 (4.5 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points: $A(1,0,2)$; $B(0,0,1)$et $C(1,1,3)$.

1°)a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ en déduire que A, B et C définissent un plan P.

b) Donner une équation cartésienne de P.

2°)Soit le point $I(1,-2,3)$.

Donner une équation cartésienne de la sphère S de centre I et tangente au plan P .

3°) Donner le volume du tétraèdre IABC.

4°) Donner une équation cartésienne d'un plan Q parallèle à P et sécant avec la sphère S en un cercle ζ de rayon $\sqrt{2}$.

EXERCICE N° 3 (4.5pts)

Soit la suite (u_n)définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ $n \in IN$.

1°)a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $0 < u_n \leq 1$.

b) Montrer que u_n est décroissante.

c) En déduire que u_n est convergente et calculer sa limite α.

2°) soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \dfrac{1}{{u_n}^2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n et retrouver α.

c) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et en déduire $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$

EXERCICE N° 4 (8 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (1-x)\,e^x + 1$

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.

b)Montrer que la courbe ζ_f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

2°) a) Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α et que $\alpha \in]1, \frac{3}{2}[$.

3°) Tracer ζ_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (***unit*****é** ***2 cm***).

4°) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer $\zeta_{g^{-1}}$ dans le même repère.

5°) Soient : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{\alpha} g(x)dx$ et $\mathcal{B} = \displaystyle\int_0^{2} g^{-1}(x)dx$.

a) Donner les interprétations géométriques de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en déduire que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
b) Calculer à l'aide d'une integration par parties $\int_0^{\alpha}(1-x)e^{x}dx$.
c) En déduire que l'aire de la région du plan délimitée par $\zeta_{g^{-1}}$, l'axe (xx') et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est égale $\dfrac{(4-2\alpha)^2}{\alpha-1}$.