Lycée IBN KHALDOUN	BAC BLANC Mathématiques	Classes : 4 Tech 2&3	
Prof: SAEMONGI		06 / 05 / 2016	3 heures

Exercice N°1: (5.5 pts)

1) Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{4x-3}$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis déterminer $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) - x \geq 0$.

2) On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°2(4 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du pourcentage des logiciels pirates en Tunisie de 2000 a 2008 .X désig le rang de l'année et y le pourcentage de logiciels pirates

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage Y	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1) Représenter le nuage de points associe a la série statistique (X,Y) dans un repère orthogonal
2) Calculer le coefficient de corrélation r. Un ajustement affine est-il fiable ? Si oui, déterminer la droite de régression y en x .donner une estimation du pourcentage de logiciels pirates en 2012
3) Les experts cherchent a modaliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points .pour cela, on pose z=ln(y)

a) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x .en déduire l'expression de y en fonction de x

b) Donner une estimation du pourcentage de logiciels pirates en 2012

4) On admet que la fonction f définie sur [0, +∞[par $f(t) = 85\,e^{-0,093t}$ est une modalisation satisfaisante de l'évolution du pourcentage de logiciels pirates depuis 2000

a) Etudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$ et construire sa courbe c_f dans le même repère

b) Calculer $I = \int_0^8 f(t)dt$ .en déduire le pourcentage moyen durant les années de 2000a 2008

<u>Exercice 3</u>(5points)

On considère la fonction définie sur $\left]-2,2\right[$ par : $f(x)=\ln(\frac{2+x}{2-x})$

on désigne par (C_f)sa courbe représentative dans un repère orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a)Montrer que que f est impaire

b) Dresser le tableau de variation de f. En déduire que f réalise une bijection de $\left]-2,2\right[$ sur□

c) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in$□ .

2) a)Ecrire une équation cartésienne de la tangente **T** à (C_f) au point O.

b) Montrer que pour tout $t\in\left[0,2\right[$ on a: $f'(t)\geq 1$.

c) Etudier la position de (C_f) par rapport à **T**.

d) Tracer **T** ainsi que les courbes (C_f) et (C_f^{-1}) dans le même repère

4)a)Vérifier que $f^{-1}(x) = 2\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}$ et en déduire une primitive de f^{-1}.

b) Calculer l'aire du domaine **D**=$\left\{M\,(x\,,y\,)\in P,\ 0\leq x\ \leq 2\ln 2\ \ et\ \ 0\leq y\ \leq f^{\,-1}(x\,)\right\}$

5) Soit (I_n) la suite définie sur IN* par: $I_n=\int_0^1 t^n f\left(t\right)dt$.

a) Montrer que $\left(I_n\right)$ est minorée par zéro.

b) Montrer que la suite $\left(I_n\right)$ est décroissante ; en déduire que $\left(I_n\right)$ est convergente.

c) Démontrer que pour tout $t\in\left[0,1\right]$ et pour tout $n\in$ IN*on a: $0\leq t^n f\left(t\right)\leq t^n \ln 3$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

<u>Exercice N°4:</u> (5.5 pts)

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p\,(X>10) = 0{,}286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes (n≥2).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n.

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?