

Exercice n°1 : (5points)

1) a) Ecrire $(3 - i)^2$ sous la forme algébrique.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (7 + 7i)z - 2 + 26i = 0$

2) Soit $f(z) = z^3 - (6 + 7i)z^2 + (-9 + 19i)z - 2 + 26i$

a) Vérifier que $f(-1) = 0$

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que $f(z) = (z + 1)(z^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$

3) Soient dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ,

Les points $A(-1)$, $B(3i)$, $C(2 + 4i)$ et $D(5 + 3i)$.

Montrer que $AB = CD$ et $(BC) \parallel (AD)$

Exercice n°2 : (5points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 - e^{-x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote de (C_f) au $V(+\infty)$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

d) Construire (C_f) dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique : 2cm)

2) a) Calculer en cm^2 l'aire A_n de la région du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites :

$D : y = x + 1$, $\Delta : x = 0$ et $\Delta' : x = n$. ($n \geq 1$)

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α

c) Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère.

d) Calculer $\int_0^\alpha f(x) dx$ en déduire $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$

Exercice n°3: (6points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$

1) a) Calculer I_0

b) A l'aide d'une intégration par partie Calculer I_1

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante

- 3) a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a : $0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$
 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
 c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$
- 4) pour tout x de \mathbb{R} on pose, $g(x) = x e^{-x}$. Montrer que g est décroissante sur $[1, +\infty[$
 b) Pour tout réel x on pose $G(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$.
 Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = 1 - e^{-x} - x e^{-x}$
 c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.
- 5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \int_n^{n+1} g(t) dt$ et $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
 a) Montrer pour $t \in [n, n+1]$ $g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$
 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $g(n+1) \leq U_n \leq g(n)$
 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
 c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = G(n+1) - G(1)$
 d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice n° 4 : (4points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe φ ci -dessous (**page 3**) représente la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer

On sait que la courbe φ contient les points des coordonnées $(1,0)$ et $(0, \frac{1}{3})$ et admet une tangente parallèle à

l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{3}$

1) Par lecture graphique.

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Donner $f(0)$, $f(1)$ et $f'(\frac{2}{3})$

2) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c

3) En déduire que $f(x) = \frac{1}{3}(1-x)e^{3x}$

4) Soit g la restriction de f sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[\frac{2}{3}; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

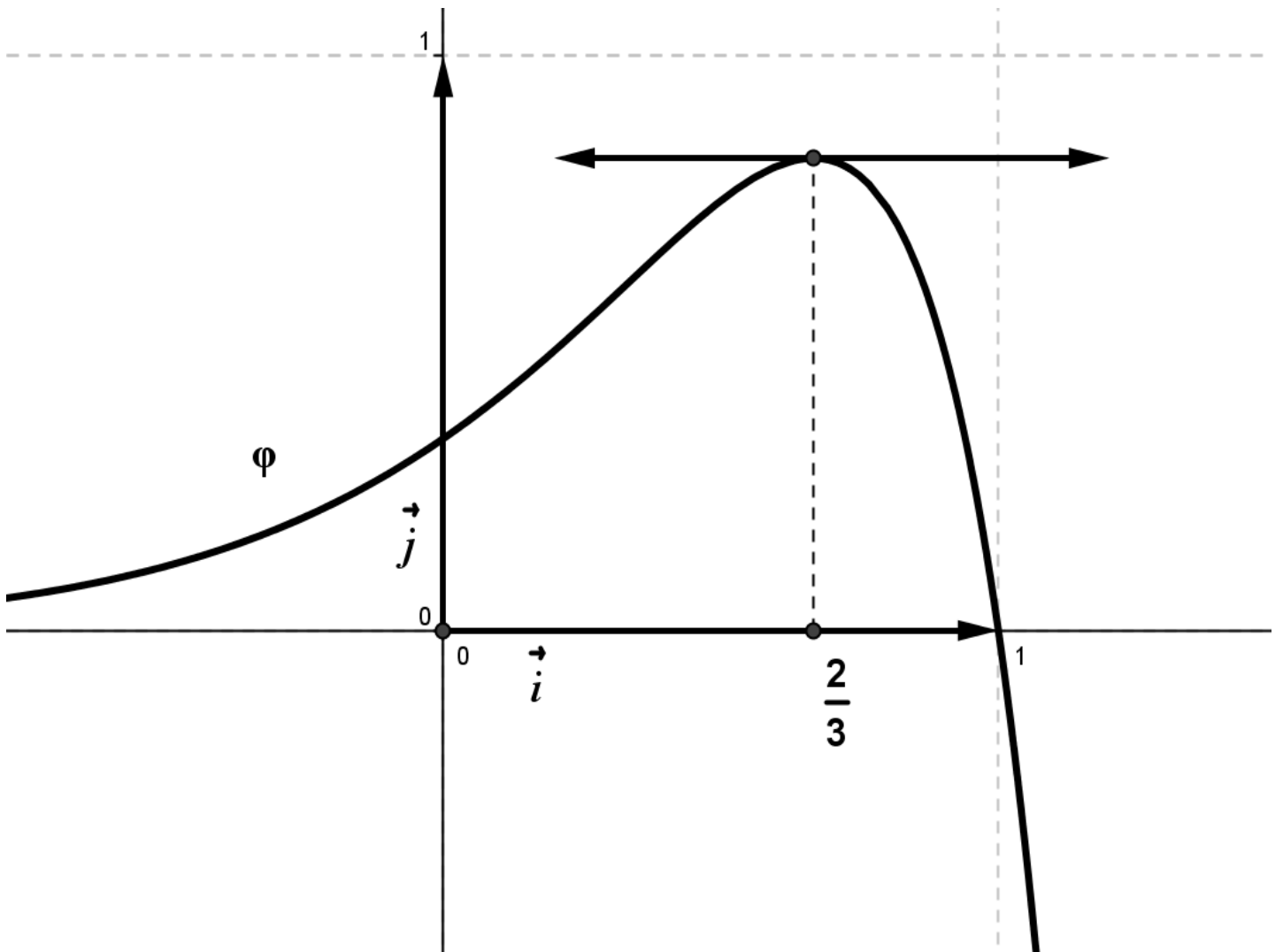
b) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère

5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par φ et les droites d'équations $x = \frac{2}{3}$; $x = 1$ et $y = 0$

Bon Travail

Feuille à Rendre avec la copie

Nom & Prénom :



Exercice n°1 :

1-a) $(3-i)^2 = 8 - 6i$

b) (E) : $z^2 - (7+7i)z - 2 + 26i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8 - 6i = (3-i)^2$

$\partial = 3-i$ ou $\partial = -3+i$

$S_C = \{5+3i ; 2+4i\}$

$z' = \frac{-b+\partial}{2a} = \frac{7+7i+3-i}{2} = 5+3i$ et $z'' = \frac{-b-\partial}{2a} = \frac{7+7i-3+i}{2} = 2+4i$

2- f(z) = $z^3 - (6+7i)z^2 + (-9+19i)z - 2 + 26i$

a) $f(-1) = -1+6+7i+9-19i-2+26i = 0$

b) $f(z) = (z+1)(z^2+bz+c) = z^3 + (b+1)z^2 + (b+c)z + c \Rightarrow \begin{cases} b+1 = -6-7i \\ b+c = -9+19i \\ c = -2+26i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -7-7i \\ c = -2+26i \end{cases}$

3- $f(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2 - (7+7i)z - 2 + 26i) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z^2 - (7+7i)z - 2 + 26i = 0$

$z = -1$ ou $z = 5+3i$ ou $z = 4+2i \Rightarrow S_C = \{-1, 5+3i, 4+2i\}$

$AB = |z_B - z_A| = |3i+1| = \sqrt{10}$

$CD = |z_D - z_C| = |5+3i-2-4i| = |3-i| = \sqrt{10}$

$\Rightarrow AB = CD$

$\frac{aff(\overline{BC})}{aff(\overline{AD})} = \frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = \frac{2+4i-3i}{5+3i+1} = \frac{2+i}{6+3i} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow (BC) \parallel (AD)$

Exercice n°2 :

1- a)

$f(x) = x+1-e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1+e^{-x} > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1-e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 - \frac{1}{e^x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1-e^{-x} = -\infty$

x	$-\infty$	$+$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x} = +\infty \Rightarrow C_f$ admet une branche parabolique de direction $(o\vec{j})$

2-a) $A_n = \int_0^n |f(x) - (x+1)| dx \times (4cm^2) = 4 \int_0^n e^{-x} dx = 4[-e^{-x}]_0^n = 4(1-e^{-n})cm^2$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4(1-e^{-n}) = 4$

3) a) f continue **strictement** croissante sur IR donc elle réalise une bijection de IR sur f(IR) = IR

b) On a f une bijection de IR sur IR ; or $1 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 1$

c) $C_f^{-1} = S_\Delta(C_f)$ avec $\Delta : y = x$ (voir courbe)

c) $\int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha x+1-e^{-x} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + e^{-x} \right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha + e^{-\alpha} - 1$

$\int_0^1 f^{-1}(x) dx = \int_0^\alpha f(x) dx$

Exercice n°3 :

$$1\text{-a) } I_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - e^{-1}$$

$$I_1 = \int_0^1 te^{-t} dt \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

b)

$$I_1 = [-te^{-t}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-t} dt = -e^{-1} - [-e^{-t}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}$$

$$2\text{-} I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1} e^{-t} dt - \int_0^1 t^n e^{-t} dt = \int_0^1 t^n e^{-t} (t-1) dt \leq 0 \text{ car } t \in [0,1] \Rightarrow (I_n) \text{ est décroissante}$$

$$3\text{-a) on a : } 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -t \leq 0 \Rightarrow 0 \leq e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$$

on a : $0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$ et les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto t^n$ sont continus sur $[0,1]$

$$b) 0 \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^n dt \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$c) \text{ on a : } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

$$4\text{- a) } g(x) = xe^{-x} \Rightarrow g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \leq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[\Rightarrow g \text{ est décroissante sur } [1, +\infty[$$

$$G(x) = \int_0^x te^{-t} dt \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

b)

$$G(x) = [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} - [-e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} - \frac{1}{e^x} + 1 = 1$$

on a : $n \leq t \leq n+1$ et g est décroissante $\Rightarrow g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$

$$5\text{-a) } \int_n^{n+1} g(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq \int_n^{n+1} g(n) dt \Rightarrow g(n+1) \leq U_n \leq g(n)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = ? \text{ on a : } g(n+1) \leq U_n \leq g(n) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \int_1^2 g(t) dt + \int_2^3 g(t) dt + \dots + \int_n^{n+1} g(t) dt = \int_1^{n+1} g(t) dt = \int_1^0 g(t) dt + \int_0^{n+1} g(t) dt$$

$$c) = \int_0^{n+1} g(t) dt - \int_0^1 g(t) dt = G(n+1) - G(1)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(n+1) - G(1) = 1 - G(1)$$

Exercice n°4 :

1-

x	$\frac{2}{3}$	
	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	-
f(x)	0	$-\infty$

$$a) f(0) = \frac{1}{3} ; f(1) = 0 \text{ et } f'(\frac{2}{3}) = 0$$

$$2\text{-} f'(x) = ae^{cx} + c(ax+b)e^{cx}$$

$$f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \text{ et } f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$3- \quad f'(\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow (a + c(\frac{2}{3}a + b))e^{\frac{2}{3}c} = 0 \Rightarrow \frac{-1}{3} + \frac{1}{9}c = 0 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(1-x)e^{3x}$$

4- a) g continue et strictement décroissante sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$ [donc elle réalise une bijection de $[\frac{2}{3}; +\infty[$ sur

$$g([\frac{2}{3}; +\infty[) =]-\infty; \frac{e^2}{9}]$$

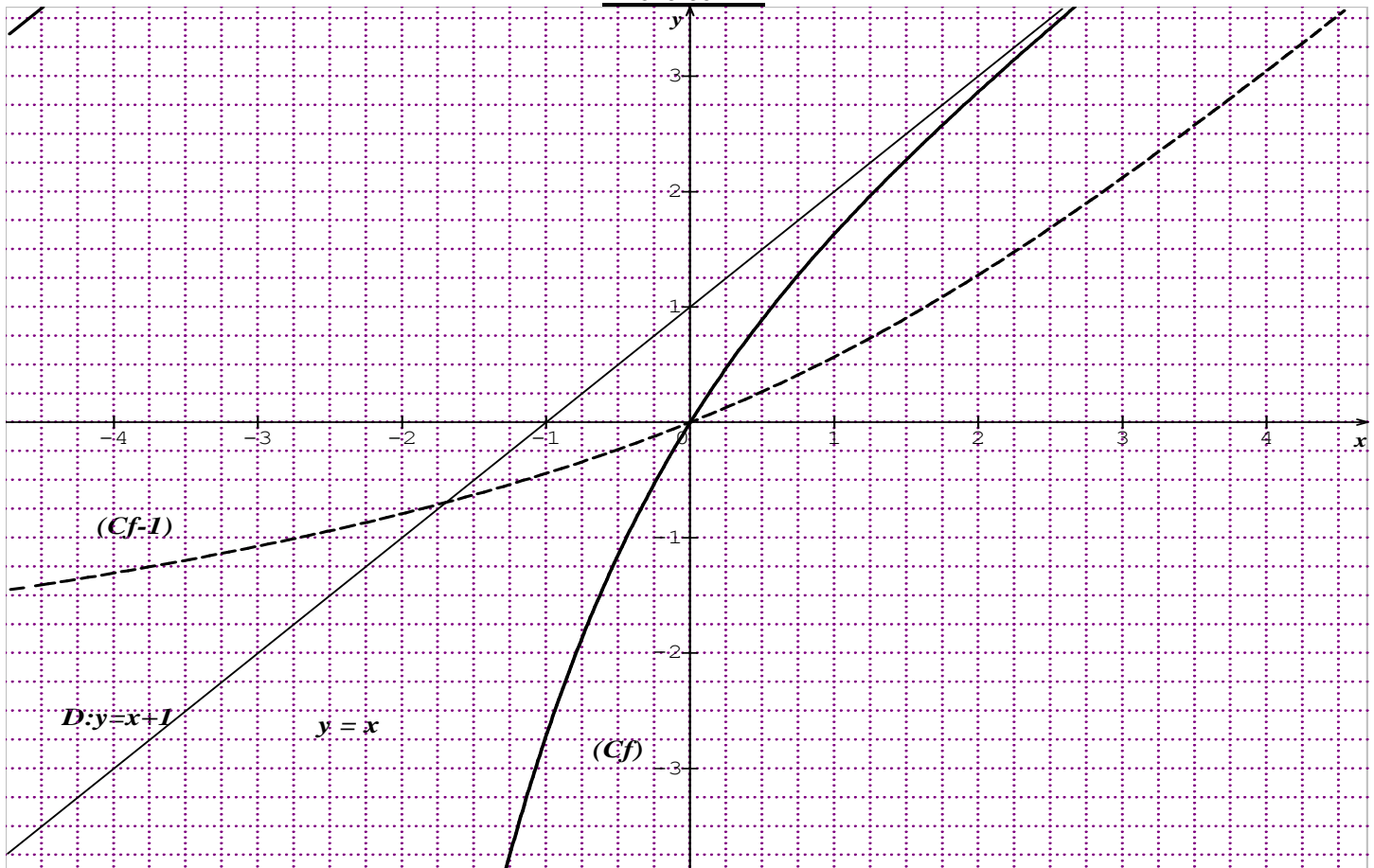
b) Voir courbe

$$A = \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{3}(1-x)e^{3x} dx \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}(1-x) \\ v'(x) = e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{3} \\ v(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$5- \quad A = \left[\frac{1}{9}(1-x)e^{3x} \right]_{\frac{2}{3}}^1 + \frac{1}{9} \int_{\frac{2}{3}}^1 e^{3x} dx = -\frac{1}{27}e^2 + \frac{1}{9} \left[\frac{1}{3}e^{3x} \right]_{\frac{2}{3}}^1 = -\frac{1}{27}e^2 + \frac{1}{27}e^3 - \frac{1}{27}e^2 = \frac{1}{27}e^3 - \frac{2}{27}e^2$$

Au revoir à l'université

Exercice n°2



Exercise n°4

