SERIE N° 5

EXERCICE N°1:

Soit u la suite définie sur $\Re$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n} \end{cases}$

1°) a- Montrer que $\forall\ n \in \mathrm{N}\ ,\ u_n < 2$.

b- Montrer que u_n est croissante.

c- En déduire que u_n est convergente et calculer sa limite.

2°) Soit v la suite définie sur $\Re$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

a- Montrer que v est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

b- En déduire v_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c- Exprimer u_n à l'aide de n et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°2:

On considère la suite réelle (u_n) définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) a- Montrer que $\forall n \in \mathrm{N}$ on a : $0 \le u_n < \sqrt{3}$.

b- Montrer que (u_n) est une suite croissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) Soit (v_n) la suite définie sur N par : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

c- Retrouver alors la limite de u_n.

EXERCICE N°3:

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On considère la suite (u_n) définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha).u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$

1°) a- Montrer que pour tout entier n, on a : $u_n \ge 1$.

b- Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2°) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α.

b- Exprimer v_n en fonction de n et α. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α.

c- Retrouver alors la limite de la suite u_n quand n tends vers $+\infty$.

EXERCICE N°4:

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \cos\theta \quad / \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

1°) Montrer que $u_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

2°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$ et que (u_n) est une suite croissante.

3°) Montrer que (u_n) est convergente vers un réel à préciser.

4°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$;Retrouver alors la limite de (u_n).

EXERCICE N°5 :

Soit u la suite définie sur $\Re$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{3}{u_n} \end{cases}$

1°) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

2°) Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\Re_+^*$ par $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$.

3°) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_{2n}$.

a- Montrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 3.

b- Montrer par récurrence que la suite (v_n) est croissante.

4°) a- Montrer que pour tout entier n, on a : $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2}|u_n - 3|$.

b- Montrer par récurrence que. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c- En déduire la limite de la suite u_n puis celle de (v_n)

Bon travail