SERIE N° 7

EXERCICE N°1:

1°) θ étant un réel de l'intervalle $[0,\pi]$, on considère l'équation dans **C**

$$E_\theta : z^2 - (2\cos\theta + 2 + i)z + 2(2\cos\theta + i) = 0$$

a- Montrer que E_θ admet une solution réelle z_0 que l'on calculera.

b-En déduire l'autre solution de E_θ

2°) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A(2) et $M(2\cos\theta + i)$.

a- Déterminer et construire l'ensemble des point M lorsque θ décrit $[0,\pi]$

b- Determiner θ pour que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = 0$

c- Déterminer les valeurs de θ pour les quelles OAM est un triangle rectangle.

EXERCICE N°2:

1°) Résoudre dans C l'équation $z^2 - (i-1)z - i = 0$.

2°) On considère l'équation $(E): z^2 - 2ie^{i\theta}\sin\theta\, z - e^{2i\theta} = 0$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a- Etablir que pour tout réel α on a $1 - e^{2i\alpha} = -2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}$.

b- Vérifier que -1 est une solution de (E).En déduire l'autre solution.

3°) Le plan est rapporté à un R.O.N direct, on considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = e^{2i\theta}$ et $z_C = e^{-2i\theta}$.

a- Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

b- Trouver θ pour que ABC soit équilatéral.

EXERCICE N°3:

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et p un entier tel que $p \in \mathbb{N}^*$.

1°) Montrer que si $x \in [p, p+1]$ alors : $\frac{-2}{p^3} \le f'(x) \le \frac{-2}{(p+1)^3}$.

2°) a- En utilisant les inégalités des accroissement finis montrer que :

$$\frac{-2}{p^3} \le \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2} \le \frac{-2}{(p+1)^3}$$

b- En déduire que si $p \ge 2$ on a : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \le \frac{1}{p^3} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2}\right)$.

3°) Utiliser ce résultat pour montrer que :si $n \ge 2$ on a :

$$\frac{9}{8}-\frac{1}{2(n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2} \quad \text{où} \quad u_n=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n^3}.$$

4°) Montrer qula suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ et que $\frac{9}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{2}$.

EXERCICE N°4:

1°) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin x$

a- Déterminer le sens de variation de la fonction f'.

b- Soit $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.Déterminer un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, u]$

c- En appliquant l'inégalités des accroissement finis montrer que :

$$u\cos u \leq \sin u \leq u \qquad (1)$$

2°) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\cos x$

a- Déterminer le sens de variation de la fonction g'.

b- Soit $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.Déterminer un encadrement de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0, u]$

c- En appliquant l'inégalités des accroissement finis, montrer que :

$$1-u^2 \leq \cos u \leq 1 \qquad (2)$$

3°) En déduire de (1) et (2)que $u-u^3 \leq \sin u \leq u$

Bon travail