

## SERIE n°12

### EXERCICE N°1:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1^\circ) \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx. \quad 2^\circ) \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt. \quad 3^\circ) \int_2^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx. \quad 4^\circ) \int_1^e \frac{\log^2 x}{x} dx.$$

$$5^\circ) \int_{\log 2}^{\log 3} 2^t dx. \quad 6^\circ) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx. \quad 7^\circ) \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt. \quad 8^\circ) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

$$9^\circ) \int_{-1}^5 |t-2| + |t-4| dt \quad 10^\circ) \int_0^3 |2t-1| dt \quad 11^\circ) \int_{-3}^0 |t^2-t-2| dt \quad 12^\circ) \int_1^e \frac{\log t}{t} dt.$$

### EXERCICE N°2:

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx.$$

1°) Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+2})$ .

a- Calculer la dérivée de  $f$ .

b- Calculer la valeur de  $I$ .

2°) a- Vérifier que  $J + 2I = K$ .

b- Montrer que  $K = \sqrt{3} - J$

c- En déduire les valeurs de  $J$  et de  $K$ .

### EXERCICE N°3:

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$$1^\circ) \int_0^\pi x \sin x dx. \quad 2^\circ) \int_0^1 x \sqrt{1+x} dx. \quad 3^\circ) \int_1^e x \log x dx. \quad 4^\circ) \int_1^e \log x dx.$$

$$5^\circ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \quad 6^\circ) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \quad 7^\circ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad 8^\circ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

### EXERCICE N°4:

Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$ .

1°) Etudier les variations de  $f$ .

2°) En déduire que pour  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  on a :  $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ .

3°) a- Vérifier que  $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  on a :  $1+x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ .

b- Montrer que  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$ .

c- Calculer :  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$ .

d- Montrer que  $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$ .