SERIE n°15

EXERCICE N°1 :(bac)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
P le plan d'équation cartésienne: $2x-y+2z-4=0.$

1°) Soit $A(0,1,-2)$; Calculer $d(A\,,P)$.

2°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D perpendiculaire au plan P et passant par A.

3°)

a- Donner une équation cartésienne de la sphère (S) de centre A et tangente au plan P.

b- Déterminer les coordonnées de C point de contact de S avec P.

4°) Trouver une équation cartésienne du plan Q strictement parallèle au plan P et tangente à la sphère (S).

EXERCICE N°2:

On désigne par S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que:

$$x^2+y^2+z^2-4y-5=0$$

1°) Montrer que S est une sphère de centre $\Omega(0,2,0)$ et de rayon 3.

2°) Soit P le plan d'équation cartésienne: $2x-2y+z-2=0$.
Déterminer la position de S et P. Caractériser S $\cap$ P.

3°) Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est:

$$P_m: 2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0.$$

a- Δ la droite dont une représentation paramétrique est:

$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1 \\ z=-2\lambda \end{cases}$; $\lambda\in\Re$. Vérifier que Δ est incluse dans le plan P_m.

b- Calculer la distance d($\Omega\,,P_m$) du point Ω à P_m.

c- Déterminer m, pour que P_m soit tangente à la sphère S.

d- Préciser les coordonnées du point du contact.

EXERCICE N°3:

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les points A(-1 , -1 , 1) ; B(-1 , 2 , -2) et le plan P dont une équation cartésienne est :
$x+y+z-2=0$.

1°) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P.

2°) Soit α un réel et S_α l'ensemble des points $M(x\,,y\,,z)$ de ξ tel que :

$$x^2+y^2+z^2+2x-2\alpha y+2\alpha z+\alpha^2+\alpha=0.$$

a- Montrer que ,pour tout réel α, S_α est une sphère de centre I_α et de rayon $R_\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$.

b- Montrer que ,quand α varie dans $\Re$, I_α décrit la droite (AB).

3°) Etudier suivant les valeurs de α, les positions relatives de S_α et du plan P.

4°) Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $S_{1-\alpha}$.

a- Montrer que I est le milieu du segment $[I_\alpha , I_{1-\alpha}]$.

b- En déduire que les sphères S_α et $S_{1-\alpha}$ sont symétrie par rapport au point I.

EXERCICE N°4:

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'ensemble S_m des points $M(x,y,z)$ de ξ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-1)x - 2my + 2(m+1)z + 3m^2 - 7 = 0$$

1°) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre Ω_m et le rayon R .

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\Re$.

3°) Soit P le plan d'équation cartésienne : $x+2y+z+3\sqrt{6}=0$.

a- Montrer que le plan P est tangente à toutes les sphères S_m.

b- Déterminer les coordonnées du point H_m : point de contact de P avec S_m.

4°) Soit D la droite passant par le point A(0, 1, 1) est de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{k}$. Trouver les coordonnées des points d'intersection de D et de S_1.

5°) Déterminer une équation cartésienne du plan Q contenant la droite D et perpendiculaire au plan P.

6°) Montrer que Q et S_1 se coupent suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°5:

Soit g la fonction définie sur $\Re$ par $g(x) = x + 1 - e^x$.

1°)

a- Dresser le tableau de variation de g .

b- En déduire que pour tout $x \in \Re$, $e^x - x \geq 1$.

2°) Soit h la fonction définie sur $\Re$ par $h(x) = -xe^x + 1$.

a- Dresser le tableau de variation de h .

b- Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α.
Vérifier que $0.5 < \alpha < 0.6$

c- Préciser le signe de h(x).

Bon Travail