EXERCICE N°1.

On considère l'équation (E) : $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$

1) Démontrer que le nombre complexe $\boldsymbol{i}$ est solution de l'équation (E).

2) Vérifier que : $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(z^2-4z+13)$

3) En déduire les solutions de (E).

EXERCICE N°2.

On considère le polynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^3+9i\,z^2+2(-11+6i)z-3(4i+12)$

1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.

2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que : $P(z) = (z-z_1).\,Q(z)$

3) Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

5) On note z_3 la 3ième solution de l'équation $P(z) = 0$. Démontrer que les points du plan complexe A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3, sont alignés.

EXERCICE N°3.

Pour tout nombre complexe z, on définit : $P(z) = z^3+2(\sqrt{2}-1)\,z^2+4(1-\sqrt{2})z-8$

1) Calculer $P(2)$. Déterminer une factorisation de $P(z)$ par $(z-2)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

On appelle $z1$ et $z2$ les solutions de l'équation autres que 2, $z1$ ayant une partie imaginaire positive.

Vérifier que $z1 + z2 = -2\sqrt{2}$. Ecrire $z1$ et $z2$ sous forme exponentielle.

3) a) Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct $(O;u;v)$ (unité graphique : 2 cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives $z1$ et $z2$, et I milieu de $[AB]$.

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OI}})$

c) Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de cosinus et de sinues de $3\pi/8$.