EXERCICE N°1.

Soit les suites suivantes :

$$U:\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \ ; n \epsilon IN \end{cases}$$

$$V:\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \ ; n \epsilon IN \end{cases}$$

$$W:\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = 2 - \frac{5}{w_n + 4} \ ; n \epsilon IN \end{cases}$$

Montrer , par récurrence que, pour tout entier n, on a :

a) $u_n > 1$ et que : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

b) $v_n < 3$ et que : $v_n = \frac{12n-3}{4n+3}$.

c) $0 < w_n < 1$ et que : $w_n = \frac{3.5^n - 3}{3.5^n + 1}$.

EXERCICE N°2.

Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} U_n^2 + 1} \quad \forall n \in IN \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer par récurrence que $\forall$ n $\in IN$ on a : $1 < U_n < \sqrt{2}$.

3) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ IN par : $V_n = U_n^2 - 2$

a) Montrer que V est une suite géométrique.

b) Calculer V_n en fonction de n, et donner sa limite.

c) En déduire U_n en fonction de n et donner sa limite.