

Examen du baccalauréat (Juin 2009)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Economie et Gestion	Session de contrôle

Exercice 1

- 1) a) 2) a) 3) b) 4) b).

Remarques

- Pour 1) les solutions sont conjuguées donc les coefficients de l'équation sont réels. Leur produit est égal à 2
- Pour 2), n'hésitez pas à représenter les points dans un repère orthonormé.
- Pour 3), $f(0) = 0$ donc la tangente passe par le point O. Il n'y a que b).
- Pour 4), Faites très attention. Il s'agit de la courbe de la dérivée de f. Donc, on doit déduire le signe de $f'(x)$.

Exercice 2

- 1) a)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 - 2 \ln x \right) = +\infty. \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote à (C).

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}x - 2 \frac{\ln x}{x} \right) - 1 = +\infty. \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} - 2 \frac{\ln x}{x^2} \right) = \frac{1}{4} = +\infty.$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

$$\text{b) Pour tout } x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{4}2x - 2\frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x}.$$

c) **Tableau de variation**

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-2\ln 2$	$+\infty$

2) a)

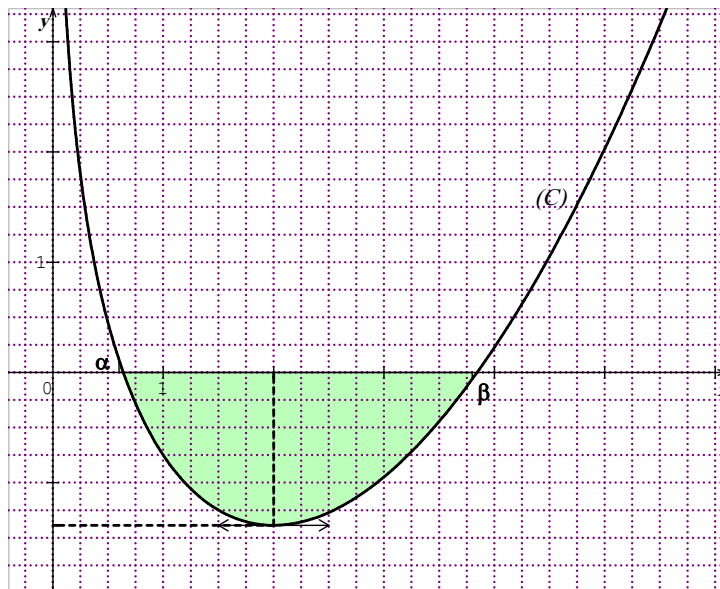
- f est continue et strictement décroissante sur $]0,2]$ et $f(]0,2])$ contient 0, donc il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus $f(0,5)=0,44\dots$ et $f(0,7)=-0,16\dots$; $f(0,5) \times f(0,7) < 0$ par suite $0,5 < \alpha < 0,7$.

- f est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$ et $f([2,+\infty[)$ contient 0, donc il existe un réel unique β tel que $f(\beta) = 0$.

De plus $f(3,7)=-0,16\dots$ et $f(3,9)=0,08\dots$; $f(3,7) \times f(3,9) < 0$ par suite $3,7 < \beta < 3,9$.

b) La courbe de f



3) a) F est définie sur $]0,+\infty[$, $F(x) = \frac{1}{12}x^3 + x - 2x \ln x$.

F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $F'(x) = \frac{3}{12}x^2 + 1 - 2 \ln x - 2x \times \frac{1}{x}$.

$$= \frac{1}{4}x^2 - 2 \ln x - 1 = f(x).$$

Donc F est la primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$.

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} -f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta) \approx 3 \text{ cm}^2 \quad \text{car } f(x) < 0 \text{ entre } \alpha \text{ et } \beta.$$

Exercice 3

1) Les 150 composants du type A sont obtenus avec $1 \times a$ (pour les TV) , $2 \times b$ (pour b DVD) et $2 \times c$ (pour c chaîne stéréo).

Par suite $a + 2b + 2c = 150$.

Les 300 composants du type B sont obtenus avec $4 \times a$ (pour les TV) , $5 \times b$ (pour b DVD) et $2 \times c$ (pour c chaîne stéréo).

Par suite $4a + 5b + 2c = 300$.

Les 300 composants du type C sont obtenus avec $2 \times a$ (pour les TV) , $4 \times b$ (pour b DVD) et $5 \times c$ (pour c chaîne stéréo).

Par suite $2a + 4b + 5c = 330$.

$$\text{Donc } (a,b,c) \text{ est solution du système (S) } \begin{cases} x + 2y + 2z = 150 \\ 4x + 5y + 2z = 300 \\ 2x + 4y + 5z = 330 \end{cases}$$

$$2) \text{ La matrice du système } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad M \times N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17 & 2 & 6 \\ 16 & -1 & -6 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17 & 2 & 6 \\ 16 & -1 & -6 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M \times N = I$ donc M est inversible et $M^{-1} = N$.

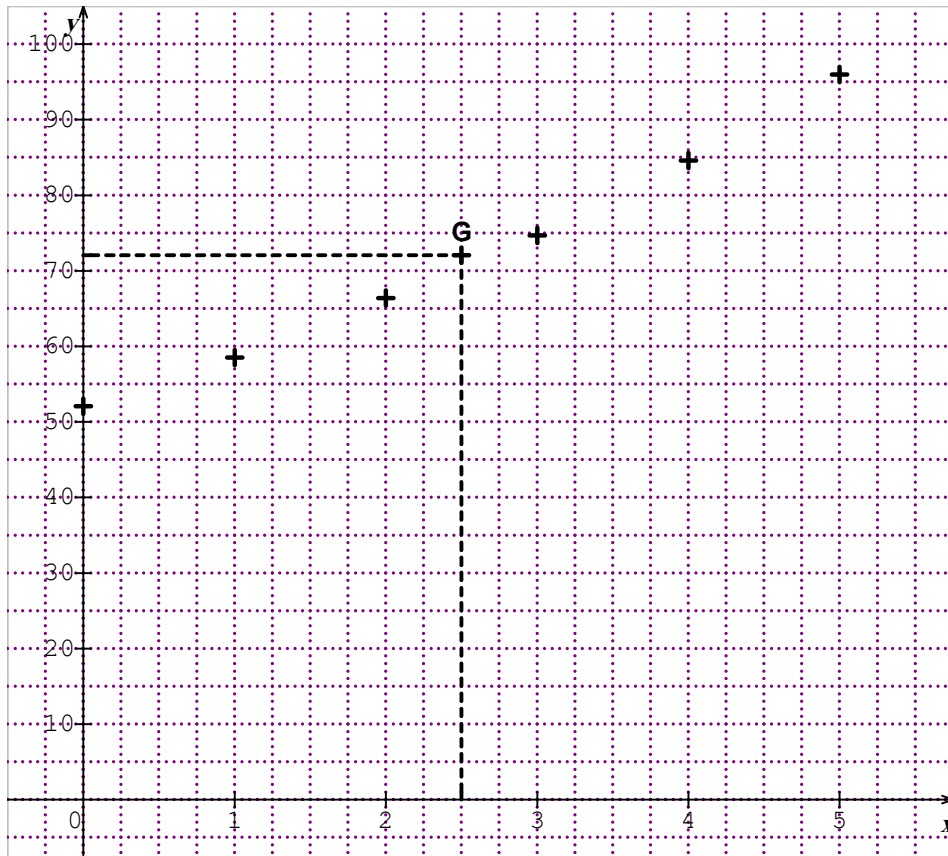
$$4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 330 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -17 & 2 & 6 \\ 16 & -1 & -6 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1)

a) Le nuage de points de la série (x_i, y_i)



b) $\bar{x} = 2,5$ et $\bar{y} = 72,05$ et le point moyen $G(2,5 ; 72,05)$.

2) a) La droite d'ajustement par la méthode de Mayer est la droite (G_1, G_2)

où G_1 est le point moyen des 3 premiers points du nuage et G_2 est le point moyen des 3 autres. $G_1(1 ; 59)$ et $G_2(4 ; 85,1)$.

$$(G_1, G_2) : \frac{y - 59}{85,1 - 59} = \frac{x - 1}{4 - 1} \text{ ce qui donne } y = 8,7x + 50,3.$$

b) Pour le prix du quintal en 2009, on remplace dans l'équation de (G_1, G_2) x par 6, on trouve $y = 102,5$ Dinars.

3) a) On considère l'ajustement défini par $f(x) = 52,1e^{0,12x}$

Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
Prix y_i du quintal	52,1	58,5	66,4	74,7	84,6	96	106,8
$8,7 x_i + 50,3$	50.3	59	67.7	76.4	85.1	93.8	102.5
$52,1e^{0,12x_i}$	52.1	58.7	66.2	74.6	84.1	94.7	106.8

b) Le deuxième ajustement est plus pertinent car les valeurs trouvées sont plus proches des valeurs de y_i .

c) D'après l'ajustement f, le prix du quintal du produit en 2010 est égal $f(7) \approx 120,400$ dinars.

2)a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$	2,89	3,18	3,50	3,87	4,28	4,56	4,84

b) Soit D la droite de régression de z en x.

$$z = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(x,z)}{V(x)} \quad \text{et } b = \bar{z} - a\bar{x}$$

$$= 0,34 \quad = 2,53$$

Donc D: $z = 0,34x + 2,53$.

c) $z = \ln y$ d'où $y = e^z = e^{0,34x+2,53}$ ce qui donne

$$y = 12,55e^{0,34x}$$

c) L'année 2008 correspond à $x = 8$.

$$\text{d'où } z = (0,34)8 + 2,53 = 5,25$$

$$\text{d'où } \ln(y) = 5,25 \quad \text{et par suite} \quad y = e^{5,25} = 190,57$$

La dépense en 2008 est estimée à 191 mille Dinars
(ou à 190 mille Dinars)