Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2014

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

I) 1)a) La courbe ζ de f passe par les points $O(0,0)$ et $B(1,\ 2e)$, d'où $f(0)=0$ et $f(1)=2\ e$.

b) La tangente en O à la courbe ζ est la droite (OA), où A(1,2).

La droite (OA) à pour équation y = 2x. D'où $f'(0)=2$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est horizontale, donc $f'(-1)=0$.

2) On a $f'(0)=2$ et $f'(-1)=0$.

- Dans la figure 1, l'image de 0 par la fonction est 1. Donc cette courbe ne peut pas être celle de f', car $f'(0)=2$.
- La courbe dans la figure 2, est celle d'une fonction qui est toujours positive. D'autre part, par une lecture graphique de la courbe ζ de la fonction f, on peut remarquer que la fonction f est décroissante puis croissante donc f' change de signe. Ainsi cette courbe ne peut pas être celle de f'.

Par élimination, la courbe de f' est celle représentée dans la figure 3.

II)1)a) $f(x)=2xe^{x};x\in\mathbb{R}$.

La valeur exacte du minimum de f est $f(-1)=-2e^{-1}=\dfrac{-2}{e}$.

b) Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-0,7$ est le nombre de points d'intersection de la courbe ζ de f et la droite D d'équation $y=-0,7$. On a $-0,7>\dfrac{-2}{e}$ donc la droite D coupe la courbe en deux points distincts. Ainsi l'équation admet deux solutions distinctes.

2) $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

a) L'intégrale I est l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe ζ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.

b) $I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 2xe^{x}\,dx=2\int_0^1 xe^{x}\,dx$.

On pose : $u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$

$v'(x)=e^{x} \Rightarrow v(x)=e^{x}$

D'où $\int_0^1 xe^{x}\,dx=\left[xe^{x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{x}\,dx=\left[xe^{x}\right]_0^1-\left[e^{x}\right]_0^1=e-(e-1)=1$.

Ainsi $I=2$.

c) On désigne par A, l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe ζ, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 2e$.

$$A = \int_0^1 (2e - f(x))\,dx = \int_0^1 2\,e\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = 2e - I = 2e - 2 = 2(e-1) \text{ u.a.}$$

Exercice 2

On a la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6-u_n}{4-u_n}$.

1)a) Montrons par récurrence que $u_n < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 0 < 2$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n. C'est-à-dire $u_n < 2$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6-u_n}{4-u_n} - 2 = \frac{6-u_n-2(4-u_n)}{4-u_n} = \frac{u_n-2}{4-u_n}.$$

On a $u_n < 2 \Rightarrow u_n - 2 < 0$ et $4 - u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{u_n-2}{4-u_n} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < 2$$

D'où l'inégalité est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $$u_{n+1} - u_n = \frac{6-u_n}{4-u_n} - u_n = \frac{6-u_n-u_n(4-u_n)}{4-u_n} = \frac{u_n - 5u_n + 6}{4-u_n} = \frac{(u_n-2)(u_n-3)}{4-u_n}.$$

c) Montrons que la suite (u_n) est croissante.

On a d'après la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-2)(u_n-3)}{4-u_n}$.

D'autre part $u_n < 2 \Rightarrow u_n - 2 < 0$, $u_n - 3 < 0$ et $4 - u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{(u_n-2)(u_n-3)}{4-u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

Ainsi la suite (u_n) est croissante.

d) On a $u_n < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (u_n) est majorée par 2.

La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2u_n - 6}{u_n - 2}$.

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-6}{u_{n+1}-2}=\frac{2\dfrac{6-u_n}{4-u_n}-6}{\dfrac{6-u_n}{4-u_n}-2}=\frac{\dfrac{2(6-u_n)-6(4-u_n)}{4-u_n}}{\dfrac{6-u_n-2(4-u_n)}{4-u_n}}=\frac{4u_n-12}{u_n-2}=2\,\frac{2u_n-6}{u_n-2}=2v_n.$$

On a $v_{n+1}=2v_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'où (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) $v_0=\dfrac{2u_0-6}{u_0-2}=3.$

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0=3$ et de raison 2.

D'où $v_n=3\times 2^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) On a : $v_n=\dfrac{2u_n-6}{u_n-2}\iff v_n(u_n-2)=2u_n-6.$

$$\iff v_nu_n-2v_n=2u_n-6$$
$$\iff v_nu_n-2u_n=2v_n-6$$
$$\iff u_n(v_n-2)=2v_n-6$$
$$\iff u_n=\frac{2v_n-6}{v_n-2}$$
$$\iff u_n=\frac{6\times 2^n-6}{3\times 2^n-2}=\frac{6\times 2^n(1-\frac{1}{2^n})}{2^n(3-\frac{1}{2^n})}=\frac{6(1-\frac{1}{2^n})}{3-\frac{1}{2^n}}=\frac{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Ainsi $u_n=\dfrac{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{6}{3}=2$; car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0.$

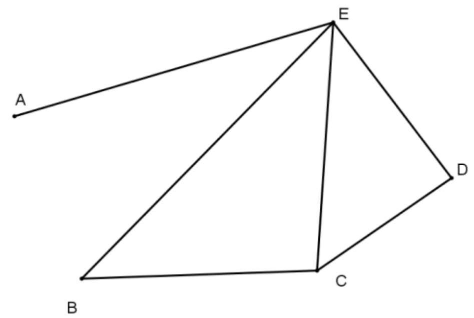
Exercice 3

G un graphe de sommets A, B, C, D et E et dont la matrice associée est :

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

1)a) On peut remarquer que la matrice M est symétrique par rapport à sa diagonale, donc le graphe G n'est pas orienté.

b) L'ordre du graphe G (le nombre de sommets) est 5.



2)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	2	3	2	4

3)a) Un sous graphe complet d'ordre 3, du graphe G, est un sous graphe de G, d'ordre 3 et dont chaque sommet est adjacent aux deux autres.

On a les sous graphes E-C-D et E-B-C sont deux sous graphes complets de G, d'ordre 3.

b) On note $\gamma(G)$ le nombre chromatique du graphe G.

Le nombre chromatique $\gamma(G)$ du graphe G est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets, donc $\gamma(G) \geq 3$.

D'autre part le plus grand degré des sommets de G est 4 (degré de E), d'où $\gamma(G) \leq 4+1=5$. On a ainsi $3 \leq \gamma(G) \leq 5$.

4) On ordonne les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés : E-C-B-D-A.

On attribue une couleur C_1 au sommet E. Tous les autres sommets sont adjacents à E, donc on ne peut pas attribuer cette couleur une autre fois. On attribue une couleur C_2 au sommet C, on peut attribuer cette couleur au sommet A puisqu'il n'est pas adjacent à C. On peut attribuer aux sommets B et D la même couleur C_3. Ainsi $\gamma(G) = 3$.

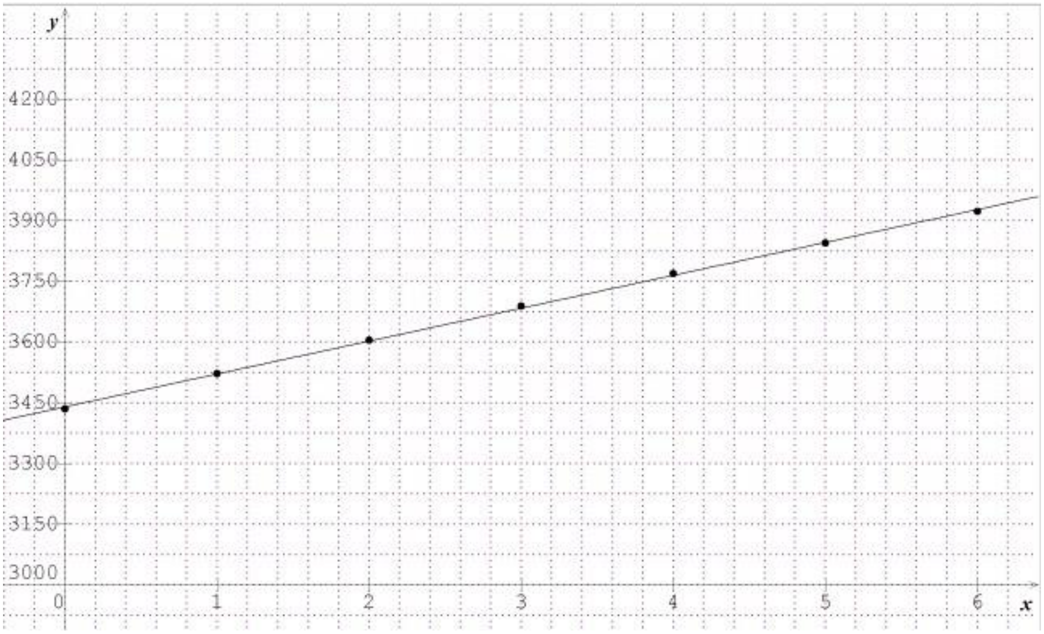
Exercice 4

L'évolution de la population active en Tunisie de 2006 à 2012 est donnée par la tableau suivant :

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
Population active en milliers (y_i)	3435	3522	3604	3689	3769	3845	3923

Source : Institut National de Statistique (INS)

1)a) Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ,\ y_i)$:



b) La forme allongée du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

2)a) On utilisant la calculatrice on détermine les coefficients $a = 81{,}25$ et $b = 3440{,}107$.

La droite de régression de y en x a pour équation : $y = 81x + 3440$ (en arrondissant les coefficients à l'unité).

b) Voir figure.

c) Le rang de l'année 2015 est $x = 9$ donc $y = 81 \times 9 + 3440 = 4169$.

Une estimation de la population active de la Tunisie en 2015 est 4169 000.