Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Session de contrôle 2018 Section : Economie et gestion

<u>Exercice 1</u> (4 points)

1- a- Soit la propriété suivante : $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, 1 \le u_n < 3$.

- Pour n=0 on a : $1 \le u_0 = 1 < 3$ donc P_0 est vraie
- Supposons P_n est vraie jusqu'à l'ordre n $(1 \le u_n < 3)$ et montrons qu'elle est vraie pour l'ordre n+1 $(1 \le u_{n+1} < 3)$

- $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - 1 = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - \dfrac{1+u_n}{1+u_n} = \dfrac{4u_n - 1 - u_n}{1+u_n} = \dfrac{3u_n - 1}{1+u_n}$

on a $1 \le u_n < 3 \Leftrightarrow 3 \le 3u_n < 9$ donc $3u_n \ge 1$ d'ou $3u_n - 1 \ge 0$

et on a aussi $1 + u_n > 0$. Ainsi $u_{n+1} - 1 \ge 0$ d'ou $1 \le u_{n+1}$

- $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - \dfrac{3(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{4u_n - 3 - 3u_n}{1+u_n} = \dfrac{u_n - 3}{1+u_n} \in \mathbb{R}_-$. Alors $1 \le u_{n+1} < 3$.

En fin d'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

b-

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - \frac{u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{4u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{3u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$$

c- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(3-u_n)}{1+u_n} > 0$ d'où la suite (u_n) est croissante.

$$2-a)\quad v_{n+1} = \frac{3-u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{3 - \frac{4u_n}{1+u_n}}{\frac{4u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{3+3u_n-4u_n}{1+u_n}}{\frac{4u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{3-u_n}{1+u_n}}{\frac{4u_n}{1+u_n}}$$

$$= \frac{3-u_n}{1+u_n} \times \frac{1+u_n}{4u_n} = \frac{3-u_n}{4u_n} = \frac{1}{4}\frac{3-u_n}{u_n} = \frac{1}{4}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$

b- $v_n = \dfrac{3-u_n}{u_n} \Leftrightarrow u_n.v_n = 3 - u_n \Leftrightarrow u_n.v_n + u_n = 3 \Leftrightarrow u_n(v_n + 1) = 3 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3}{1+v_n}$

c- (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$

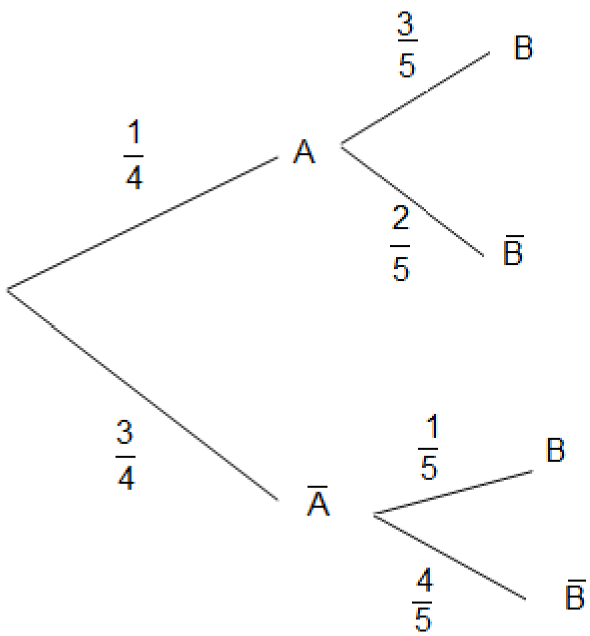
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

<u>Exercice 2</u> (5 points)

1) a) A « Obtenir Pile » donc $\overline{A}$ « Obtenir Face »

$$P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

b)



2) a) $p(B) = (B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p(A)\, p(B / A) + p(\overline{A})p(B/ \overline{A})$

Donc $p(B) = \frac{1}{4} . \frac{3}{5} + \frac{3}{4} . \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

b) $p(B / A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{4} . \frac{3}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{2}.$

3) a) X suit une loi binomiale de paramètres n et p = $p(B) = \frac{3}{10}$.

$P(X= 4) = C_5^4 \,(\frac{3}{10})^4 . (\frac{7}{10})^1 = \frac{2835}{10^5} = 0{,}02835.$

b) $E(X) = n . p = 5 \text{ x} \frac{3}{10} = \frac{3}{2}.$

$V(X) = n . p . \bar{p} = \frac{21}{2}.$

<u>Exercice 3</u> (5 points)

1) a)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 9{,}9 & 7{,}5 & 3{,}75 \\ 1030 & 780 & 385 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9{,}9\begin{vmatrix} 780 & 385 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1030\begin{vmatrix} 7{,}5 & 3{,}75 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 7{,}5 & 3{,}75 \\ 780 & 385 \end{vmatrix}$$

$$= 9{,}9 \text{ x } 395 - 1030 \text{ x } 3{,}75 + 2887{,}5 - 2925 = 10{,}5$$

$\det(A) \neq 0$ donc A est inversible.

b) $A \text{ x } B = \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{pmatrix} = 210 \text{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 210\ I_3$.

$A \text{ x } B = 210\ I_3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{210} A \text{ x } B = I_3$ d'où $A^{-1} = \dfrac{1}{210}$ B.

2) a) On pose :

x = le nombre des bagues de types B_1

y = le nombre des bagues de types B_2

z = le nombre des bagues de types B_3.

Chaque bague pèse 5 grammes, le poids total d'or est :

$$\frac{9}{100}.5x + \frac{75}{100}.5y + \frac{37{,}5}{100}.\ 5z = 312 \quad \Leftrightarrow 5(0{,}99x + 7{,}5y + 0{,}375\ z) = 312$$

$$\Leftrightarrow 9{,}9x + 7{,}5y + 0{,}375\ z = 624$$

Le bijoutier fabrique 100 bagues donc x + y + z = 100

Ainsi la situation se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 9{,}9x + 7{,}5y + 3{,}75z = 624 \\ 1030x + 780\ y\ 385\ z = 64700 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

b) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9{,}9 & 7{,}5 & 3{,}75 \\ 1030 & 780 & 385 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{210} B \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{210} \begin{pmatrix} 7900 & -73 & -750 \\ -12900 & 123 & 1020 \\ 5000 & -48 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Donc $x = 10$, $y = 50$ et $z = 40$.

<u>Exercice 4</u> (6 points)

A) 1) Le point A(1, e-1) $\in C_f$ donc f(1) = e-1.

Au point A la tangente est horizontale donc f'(1)= 0.

b) la droite d'équation y = -1 est une asymptote à C_f au voisinage de + ∞ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1.$

c) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points donc

l'équation f(x) = 0 possède exactement deux solutions.

d) tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	-1	↗	e-1	↘	-1

2) a) F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a : $F'(x) = -e^{2-x}(x+1)e^{2-x} - 1) = x\, e^{2-x} - 1 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

b) $A = \int_{\frac{1}{2}}^{3} |f(x)|\, dx$, or C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Donc $A = \int_{\frac{1}{2}}^{3} |f(x)|\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{3} f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{3} = F(3) - F(\frac{1}{2})$.

Donc $A = \left(-(3+1)\, e^{2-1} - 3\right) - \left(-(\frac{1}{2}+1)e^{2-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{e} - \frac{5}{2}$.

B) 1) $f(2) = 2\, e^{2-2} - 1 = 1$ donc pour 200 litres le bénéfice est 1000 dinars.

2) Le bénéfice est maximal si f atteint son maximum qui se réalise pour x = 1.

Donc pour obtenir le bénéfice maximal la quantité du produit est :

1 x 1000 = 1000 litres. Le bénéfice maximal est donc :

f(1) x 1000 = $\left(1.e^{2-1} - 1\right).1000 = 1000\,e - 1000 \approx 1718,28$ dinars.

3) le bénéfice moyen est $\bar{f} = \frac{1}{3-0,5}\int_{\frac{1}{2}}^{3} f(x)\, dx = \frac{1}{2,5}A = \frac{3}{5}e^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{5e} - 1$.

Ainsi $\bar{f} \approx 1100$ dinars.