

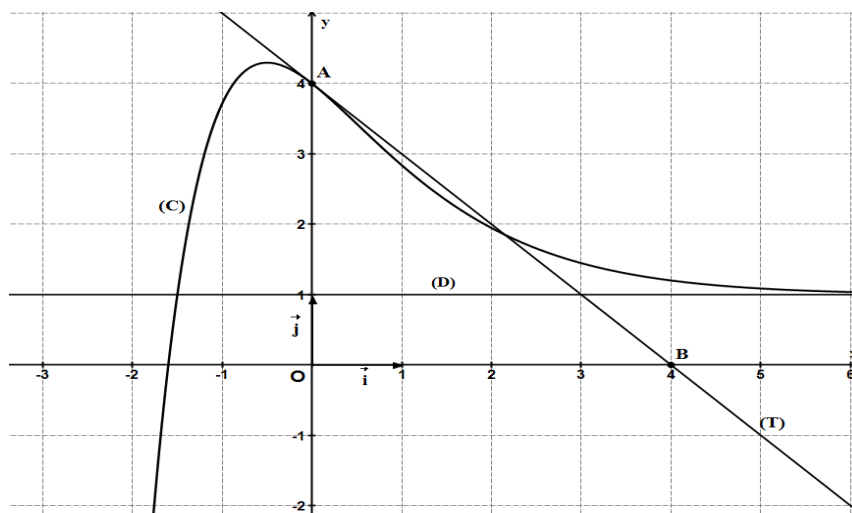
Exercice 1

1) a) $f(0) = 4$ et $f'(0) = -1$.

b) (T) : $y = -x + 4$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

d) $2 < A < 3$.



2) a) $f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$.

b) $\begin{cases} f(0) = 4 \\ f'(0) = -1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 1 + b = 4 \\ a - b = -1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$
 équivaut à $f(x) = 1 + (2x + 3)e^{-x}$, pour tout réel x .

c) La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et $F'(x) = 1 - 2e^{-x} + (2x + 5)e^{-x} = f(x)$.
 Alors F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

d) $A = \int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = 1 - 9e^{-2} + 7e^{-1}$.

Exercice 2

1) a) Nombre d'arêtes sortantes et le nombre d'arêtes entrantes :

	A	B	C	D	E
d^+	2	2	1	2	1
d^-	2	1	1	2	2

b) $d^+ \neq d^-$ pour les sommets B et E donc G n'admet pas de cycle eulérien.

c) Pour les sommets A, C et D : $d^+ = d^-$.

Pour le sommet B : $d^+ = d^- + 1$.

Pour le sommet E on a $d^+ = d^- - 1$.

Donc G admet une chaîne eulérienne.

d) Exemple de chaîne eulérienne : B-D-A-C-D-E.

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il ya 2 chaînes de longueur 2 reliant le sommet B à E.

Exercice 3

1) On trouve $C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 14 \\ -2 & 4 & -9 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$.

2) a) $\det(A) = \frac{1}{4} \neq 0$. Alors la matrice A est inversible.

b) Il suffit de vérifier que $AXC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $(-2) + 6x_1 + 4x_2 - 8 = 4 \neq 0$, ainsi le triplet $(-2, 1, 2)$ ne vérifie pas la deuxième équation du système, par la suite il n'est pas une solution de (S).

a) (a, b, c) est une solution du système (S) équivaut à

$$\begin{cases} 2a + 2b - c = -4 \\ a + 6b + 4c = 8 \\ 2b + 2c = 6 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a + b - \frac{1}{2}c = -2 \\ \frac{1}{2}a + 3b + 2c = 4 \\ b + c = 3 \end{cases} \text{ équivaut à } A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) $A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ On trouve $a=10 \quad b=-7 \quad c=10$

Exercice 4

1) $U_1 = \frac{1}{2}(U_0 + e) = \frac{3}{2}e$ et $U_2 = \frac{1}{2}(U_1 + e) = \frac{5}{4}e$.

2) a) $U_0 = 2e > e$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n > e$ et montrons que $U_{n+1} > e$.

En effet si $U_n > e$ alors $U_n + e > 2e$ d'où $\frac{1}{2}(U_n + e) > e$ c'est-à-dire $U_{n+1} > e$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > e$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + e) - U_n = \frac{1}{2}(e - U_n) < 0$ car $e < U_n$.

c) La suite U est décroissante et minorée par e alors elle est convergente.

3) Soit la suite V est définie sur \mathbb{N} par $V_n = U_n - e$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - e = \frac{1}{2}(U_n + e) - e = \frac{1}{2}(U_n + e) - \frac{2}{2}e = \frac{1}{2}(U_n + e - 2e) = \frac{1}{2}(U_n - e) = \frac{1}{2}V_n$.

Alors V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) $V_0 = U_0 - e = 2e - e = e$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = e \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

De l'égalité $V_n = U_n - e$, on déduit que $U_n = e + e \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ par la suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e + e \left(\frac{1}{2}\right)^n = e$.