Section: Sciences de l'informatique ***Session de contrôle 2009***

Matière : Mathématiques (Corrigé)

<u>Exercice 1</u> (4 points)(QCM)

- ✓ **Contenu :** Géométrie dans l'espace : alignement, positions relatives.
- ✓ **Aptitudes visées :** Décider de l'alignement de trois points de l'espace, de la colinéarité et de l'orthogonalité de deux vecteurs,
- ✓ **Corrigé :**

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\frac{3}{5} \neq \frac{0}{1}$

d'où A, B et C ne sont pas alignés donc définissent un plan P

2) a) Faux	b) Vrai	c) Vrai	d) Faux
$\begin{cases}-2 = 3-2a \Rightarrow a = \frac{5}{2}\\ -1 = -a \Rightarrow a = 1\\ 3 = 1+3a\end{cases}$	$\vec{u}_D\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{u}_D = -\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$ est directeur de **D**	$\vec{u}_D.\overrightarrow{AB} = -6+0+3 \neq 0$

<u>Exercice 2</u> (4 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- ✓ **Corrigé :**

1) $u = \frac{1-2i}{1-i} = \frac{3-i}{2}$

2) $u = 2i \Leftrightarrow \frac{z-i}{z} = 2i \quad (z \neq 0) \quad \Leftrightarrow z = \frac{i}{1-2i} \Leftrightarrow z = -\frac{2}{5}+\frac{i}{5} = \frac{1}{5}(-2+i)$

3) <u>**1^e Méthode :**</u> $|u| = 1 \Leftrightarrow \left(|z-i| = |z| \text{ et } z \neq 0\right) \Leftrightarrow AM = MO$ avec $A(i)$ et $M(z)$

D'où l'ensemble des points M est la médiatrice de $[AO]$

2e Méthode : On pose $z = x + iy$ $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$|z - i|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -2y + 1 = 0$ d'où

$\{M(z) / \ |u| = 1\}$ est la droite $D : 2y - 1 = 0$

4) Pour $z \neq 0$ on a :

$\frac{z - i}{z} = -iz \Leftrightarrow \left(iz^2 + z - i = 0\right) \Leftrightarrow \Delta = -3$ et $z = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ ou $z = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$

Exercice 3 (4 points)

- ✓ **Contenu :** Suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une suite, étudier la convergence d'une suite, détermine la limite d'une suite convergente.
- ✓ **Corrigé :**

1)a) $u_0 = 6 > 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 3$ et montrons que $u_{n+1} > 3$

On a $u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3) > 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 3$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3}(u_n - 3) < 0$ *d'où* (u_n) est décroissante.

(u_n) est décroissante et minorée par 3 donc elle est convergente.

c) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$ qui est continue en l alors $f(l) = l \Leftrightarrow l = 3$

2)a) $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln\left(\tfrac{1}{3}(u_n - 3)\right) = -\ln 3 + v_n$

d'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 3$ et de 1er terme $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln 3$

b) $v_n = v_0 + n \times r = (1 - n)\ln 3$

$v_n = \ln(u_n - 3) \Leftrightarrow e^{v_n} = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n} + 3 \Leftrightarrow u_n = e^{(1-n)\ln 3} + 3 \Leftrightarrow u_n = 3^{(1-n)} + 3$

c) $\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} e^{(1-n)\ln 3} + 3 = 3$ car $\lim_{+\infty} e^{(1-n)\ln 3} = 0$

Exercice 4 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un tableau de variation pour : donner un extrémum, une équation d'une asymptote et une équation d'une tangente - Reconnaître un point d'inflexion - Tracer la courbe d'une fonction - Calculer une aire plane.

✓ **Corrigé :**

1)a) f admet un maximum en 1 de valeur 2

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ d'où $\Delta : y = 0$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$

c) $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ d'où $T : y = 2ex$

2)a) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{2e}{e^{x}} = +\infty$,

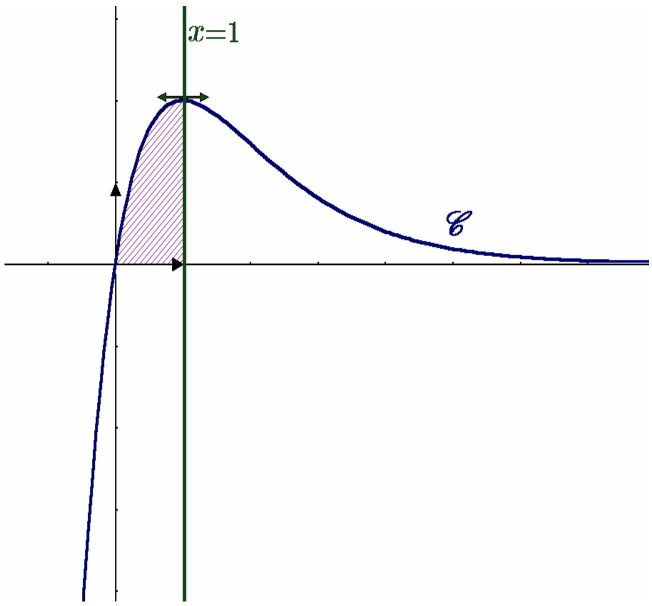
$(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{(1-x)} - 2xe^{(1-x)}$,

$f''(x) = -2e^{(1-x)} - (2e^{(1-x)} - 2xe^{(1-x)}) = (-4 + 2x)e^{(1-x)}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

f'' s'annule en changeant de signe au point d'abscisse 2 d'où le point $(2, f(2))$ est un point d'inflexion pour $(\mathscr{C})$

c) Voir courbe.



d) $u = x \Rightarrow u' = 1$, $v' = e^{(1-x)} \Rightarrow v = -e^{(1-x)}$

$I = \left[xe^{(1-x)}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{(1-x)}dx = -2 + e$

$A = 2I = (2e - 4)\,u.a$

Exercice 5 *(3 points)*

- ✓ **Contenu :** Arithmétique – Géométrie dans l'espace.
- ✓ **Aptitudes visées :**
  - Connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z, calculer le pgcd de deux entiers, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans Z^2, des équations du type : ax+by=c.
  - Déterminer la position relative de deux plans.
- ✓ **Corrigé :**

1)a) $4\times(-2)+5\times 3=-8+15=7$

b) $(-2,3)$ est une solution particulière d'où $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-2-5k,3+4k),\ k\in\mathbb{Z}\}$

2)a) $\vec{n}_P\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\frac{1}{3}\neq\frac{6}{-1}$;

$\vec{n}_P$ et $\vec{n}_Q$ ne sont pas colinéaires donc P et Q sont sécants en une droite D.

b) Un point M de coordonnées entières (x, y, z) appartient à D si et seulement si

b) $\begin{cases}x+6y-z-8=0\\3x-y+z+1=0\end{cases}$

$4x+5y-7=0 \Leftrightarrow 4x+5y=7$ donc $x=-2-5k$ et $y=3+4k$, $k\in\mathbb{Z}$

On remplace dans l'équation de P, on trouve $19k-z+8=0 \Leftrightarrow z=19k+8$

d'où $\mathcal{F}=\{(x=-2-5k,\ y=3+4k,\ z=8+19k),\ k\in\mathbb{Z}\}$